Analytisk Geometri

Undervisning 4

Analytisk Geometri

Grafen for en lineær funktion

Vi ved fra den lineær funktion, at forskriften for den lineær funktion er

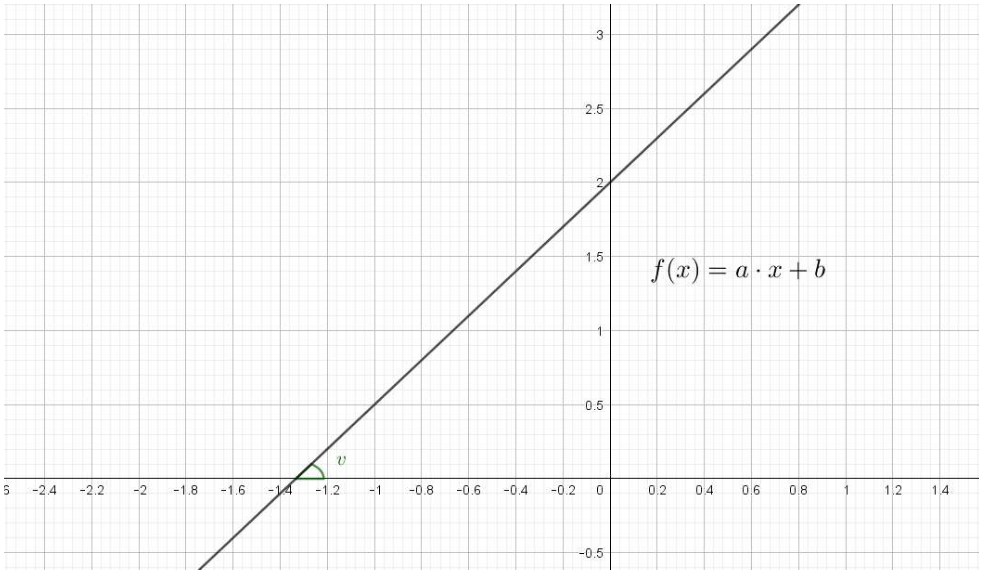
$$y = a \cdot x + b$$

Hvor a = hældningstallet og b = skæring med y-aksen.

Analytisk Geometri

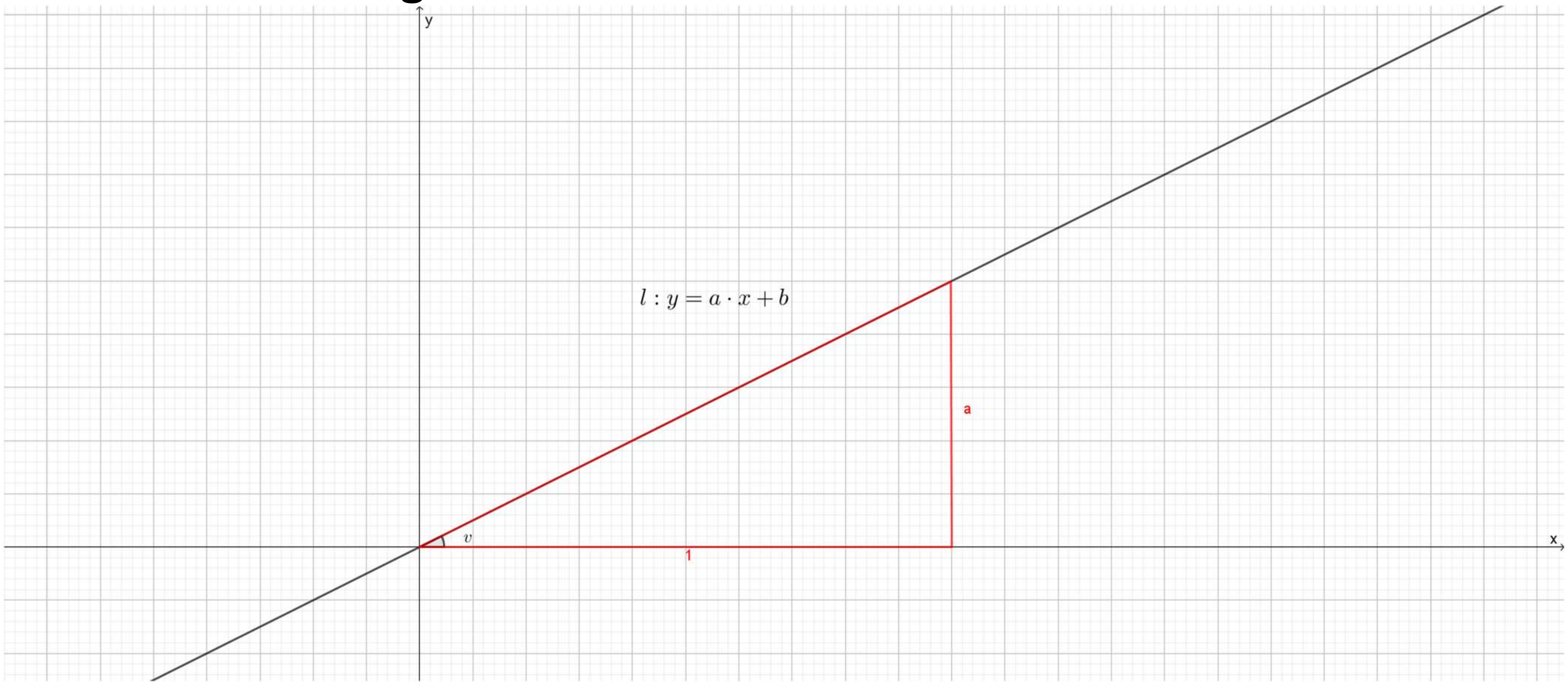
Hældningvinkel.

Sætning: En linjes hældningsvinkel v er vinklen fra 1.aksen til linjen regnet med fortegn. Om hældningsvinklen og hældningstallet gælder det. $a = \tan(v)$ og $v = \tan^{-1}(a)$



Analytisk Geometri

Bevis : Hældningsvinkel.



Analystisk Geometri

Bevis fortsat: Hældningsvinkel

Del 1: Positiv hældning $a > 0$.

Vi ved fra den retvinklet trekant, at $\tan(v) = \frac{mod}{hos}$ og dette kan skrives i dette tilfælde $\tan(v) = \frac{a}{1} = a$

Derfor $\tan(v) = a$ og $v = \tan^{-1}(a)$, hvor $v \in]0; 90[$

Analytisk Geometri

Bevis fortsat: Hældningsvinkel

Del 2 : Hvis a = 0, så gælder det at $v = 0$ °, da $\tan(0) = 0$

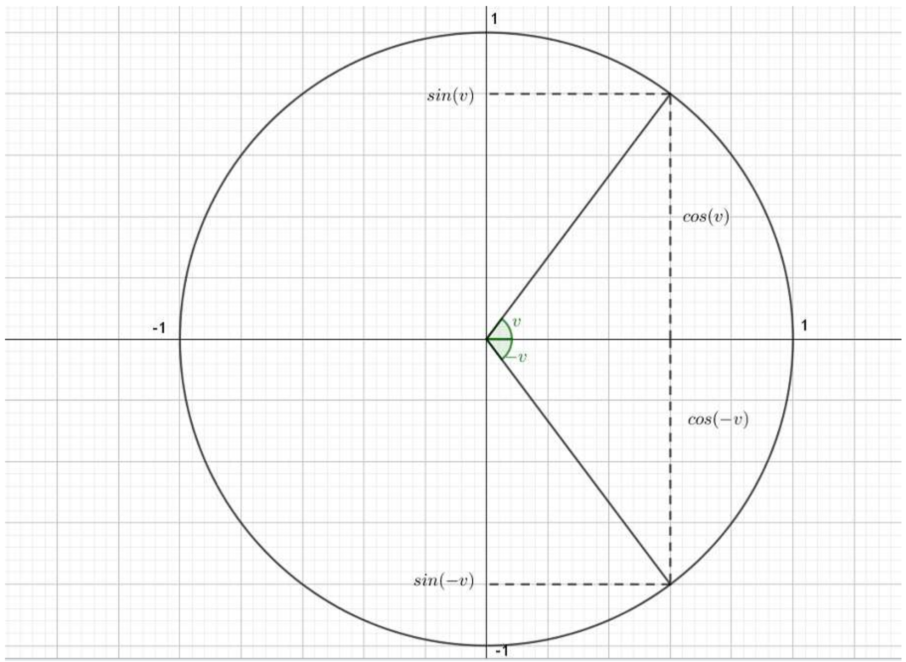
Analystisk Geometri

Bevis fortsat: Hældningsvinkel

Del 3: Negativ hældning: a < 0.

$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$$

Således $-a = -\tan(v)$ og $v = \tan^{-1}(-a)$



Hermed er bevist slut ▫

Analytisk Geometri

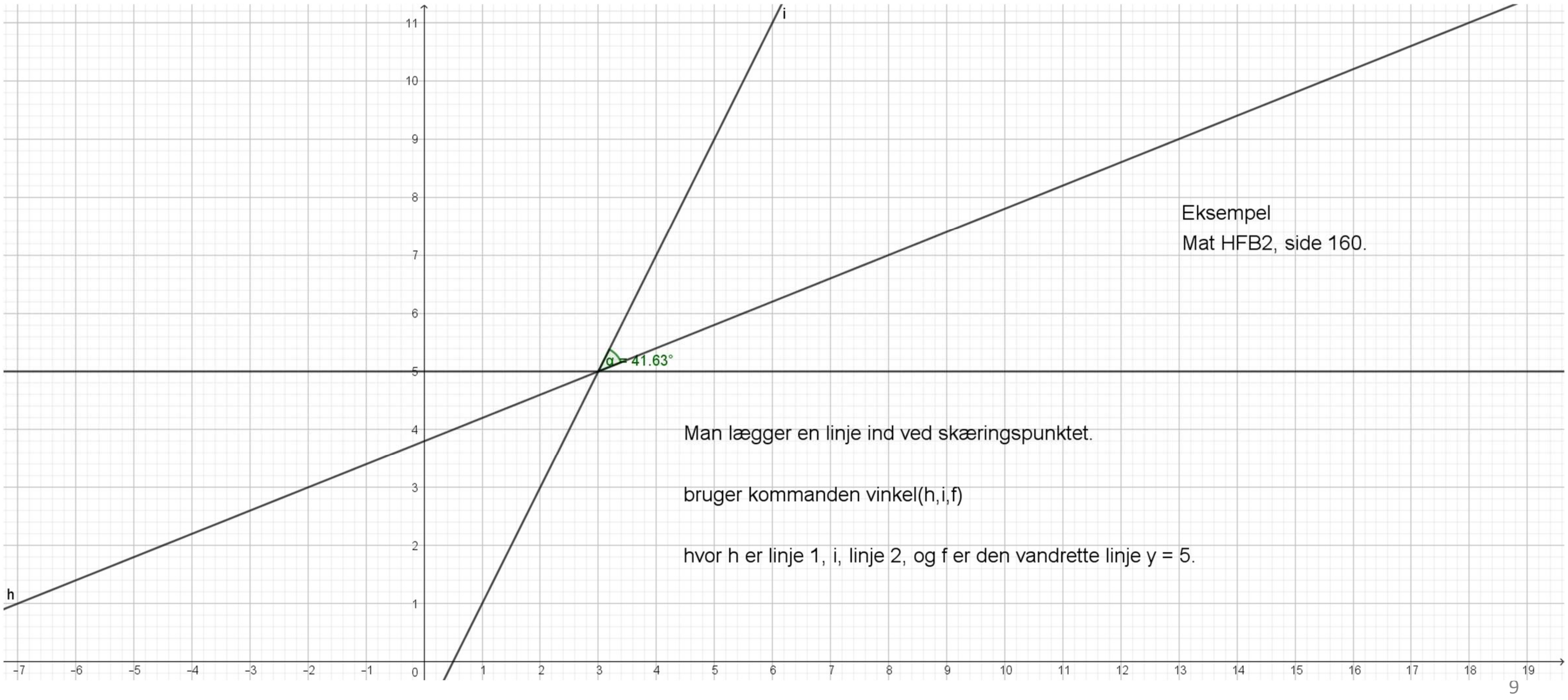
Skæring mellem linjer.

Vi ved fra C-niveau, at hvis man finde skæringen mellem 2 linjer. Så er det det samme som at løse en ligning.

Eks. $2 \cdot x - 1 = 0.4 \cdot x + 1$, som har løsningen $x = 3$

Men hvordan finder man vinklen imellem dem?

Analytisk Geometri



Analytisk Geometri

Skæring mellem linjer (alternativ metode).

Se eksempel 18-19, side 160-161 Mat2 HFB.

Analytisk Geometri

Vi ved fra linjens ligning at forskriften for en ret linje,

$$y = a \cdot x + b$$

Hvor a er hældningen er og er skæringen med y-aksen i (0,b).

Men hvordan kan denne ellers udtrykkes?

Analytisk Geometri

Sætning:(linjens ligning)

En linje som går igennem punktet P(x_0, y_0) kan skrives.

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Analytisk Geometri

Bevis (fortsat)

1) Ved at indsætte Punktet p i forskriften fås

$$y_0 = a \cdot x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - a \cdot x_0$$

2) Dette indsættes i den oprindelige forskrift for linjen.

$$y = a \cdot x + y_0 - a \cdot x_0 = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Hermed er sætningen bevist ▫

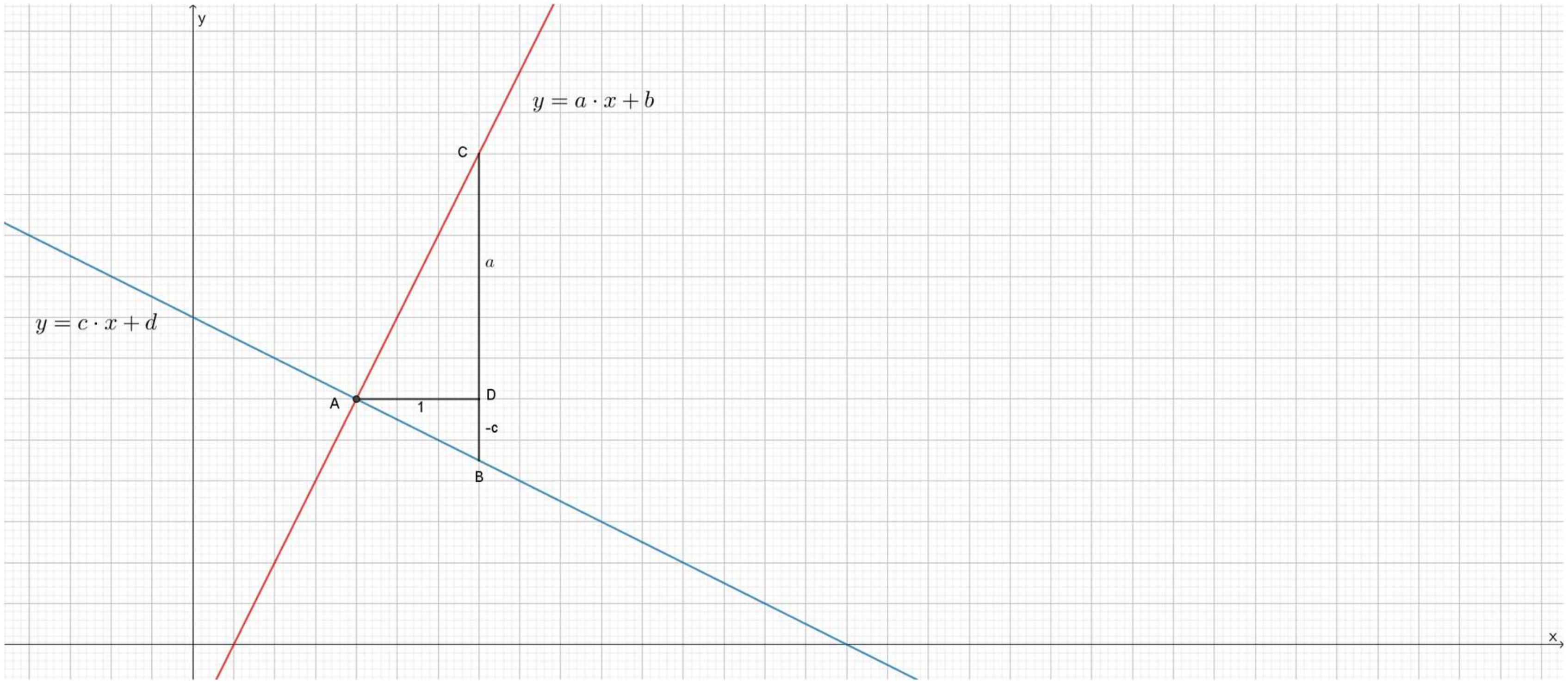
Analytisk Geometri

Sætning: Ortogonale linjer

2 linjer $y = a \cdot x + b$ og $y = c \cdot x + d$ siges at være ortogonale(vinkelrette), hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$

Analytisk Geometri

Bevis : Ortogonale linjer



Analytisk Geometri

Bevis(Ortogonale linjer) fortsat

Vi ser på tegningen fra før, og ser der dannes en trekant, ABC.

Ved at anvende Pythagoras fås

$$\left(a + (-c)\right)^2 = (1^2 + a^2) + (1^2 + (-c)^2)$$

Analytisk Geometri

Bevis fortsat

$$\left(a + (-c)\right)^2 = (1^2 + a^2) + (1^2 + (-c)^2)$$

$$a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c = 1 + a^2 + 1 + c^2$$

$$-2 \cdot a \cdot c = 2$$

$$a \cdot c = -1$$

$\square$

Analytisk Geometri

Eksempel undersøg om linjer or ortogonale.

$y = 4 \cdot x - 2.02$ og $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 1$

Først tegner vi linjerne i Geogebra.

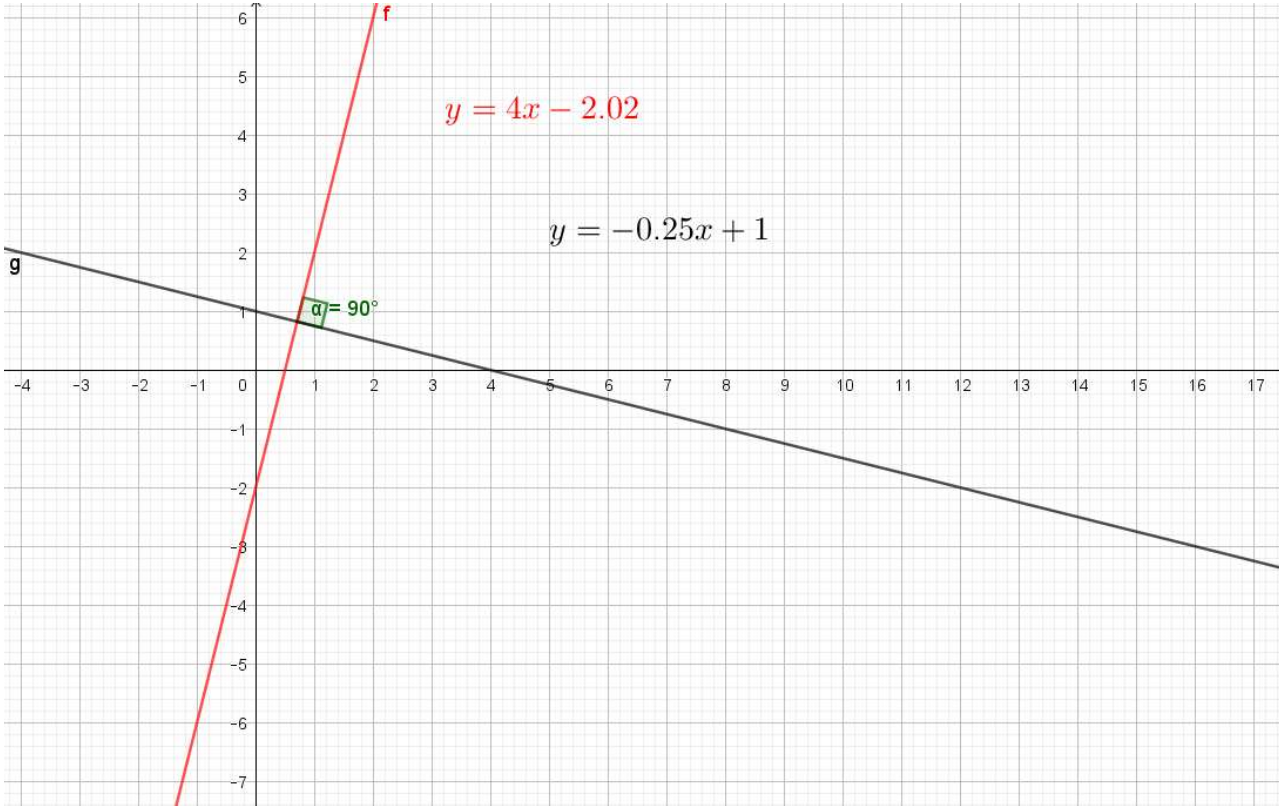
Analytisk Geometri

Husk linjer i Geogebra udtrykkes på formen

$$y = a \cdot x + b$$

Eller er det ikke muligt, at afsætte vinklen som vist.

Det ser ud til at linjerne grafisk er ortogonale. Men vi skal også vise det med formel.



Analytisk Geometri.

Eksempel fortsat

Vi indsætter i formlen, $a = -\frac{1}{4}$ og $c = 4$, så

$$a \cdot c = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$$

Hermed er det vist, at linjerne er ortogonale (vinkelrette på hinanden).

Opgaver

Opgave 1101 – 1108, side 176, Kernestof Mat2-bogen.

Opgave 1110 – 1111, side 177, Kernestof, Mat2-bogen.

Analytisk Geometri

Afstande

I geometri er det også et krav man skal kunne finde en afstand mellem punkter og linjer eller punkter og punkter.

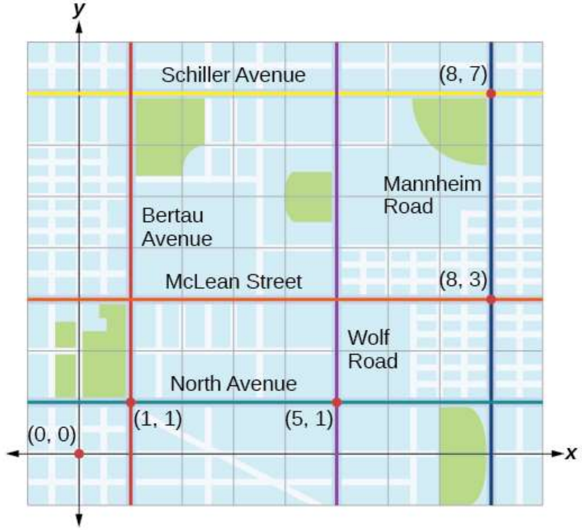
Analytisk Geometri

Afstand mellem punkter.

Antag du har dette udsnit af kort en amerikansk by. Samt at hver lokalitet er markeret med et koordinat (x,y), og dit udgangspunkter er (0,0).

Hvordan finder du afstanden fra (0,0) til (8,7) ?

Det gøres ved hjælp af afstandensformlen. (punkt til punkt).



Analytisk Geometri

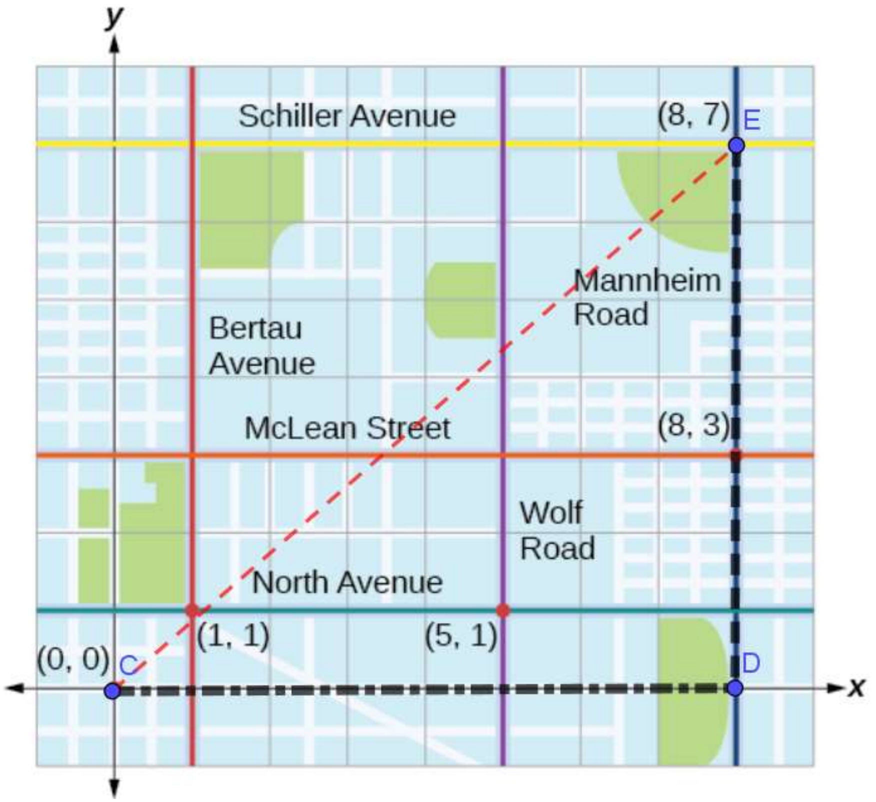
For at bestemme afstanden fra C til E, så lægger vi en retvinklet trekant ind. Trekanten har et hjælpepunkt med koordinaterne (8,0).

Vi kan dernæst anvende Pythagoras-sætning på trekanten, så ledes at afstanden |CD| kan udtrykkes som forskellen med x-koordinaterne.

|CD|= 8 – 0 = 8

Herefter findes afstanden |CE|= 7-0 = 7

Forskellen mellem y-koordinaterne.



Analytisk Geometri

Afstand (punkt til punkt).

Derfor $|CE|^2 = |CD|^2 + |\mathrm{DE}|^2$ (jf. Pythagoras-sætningt)

$$|CE|^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$$

Afstanden $|CD| = \sqrt{113} = 10.63$

Analytisk Geometri

Sætning: Afstandsformlen(punkt til punkt).

Afstandsformlen : $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Er afstanden |AB| mellem punkterne $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ og $\mathrm{B}(x_2, y_2)$

Analytisk Geometri

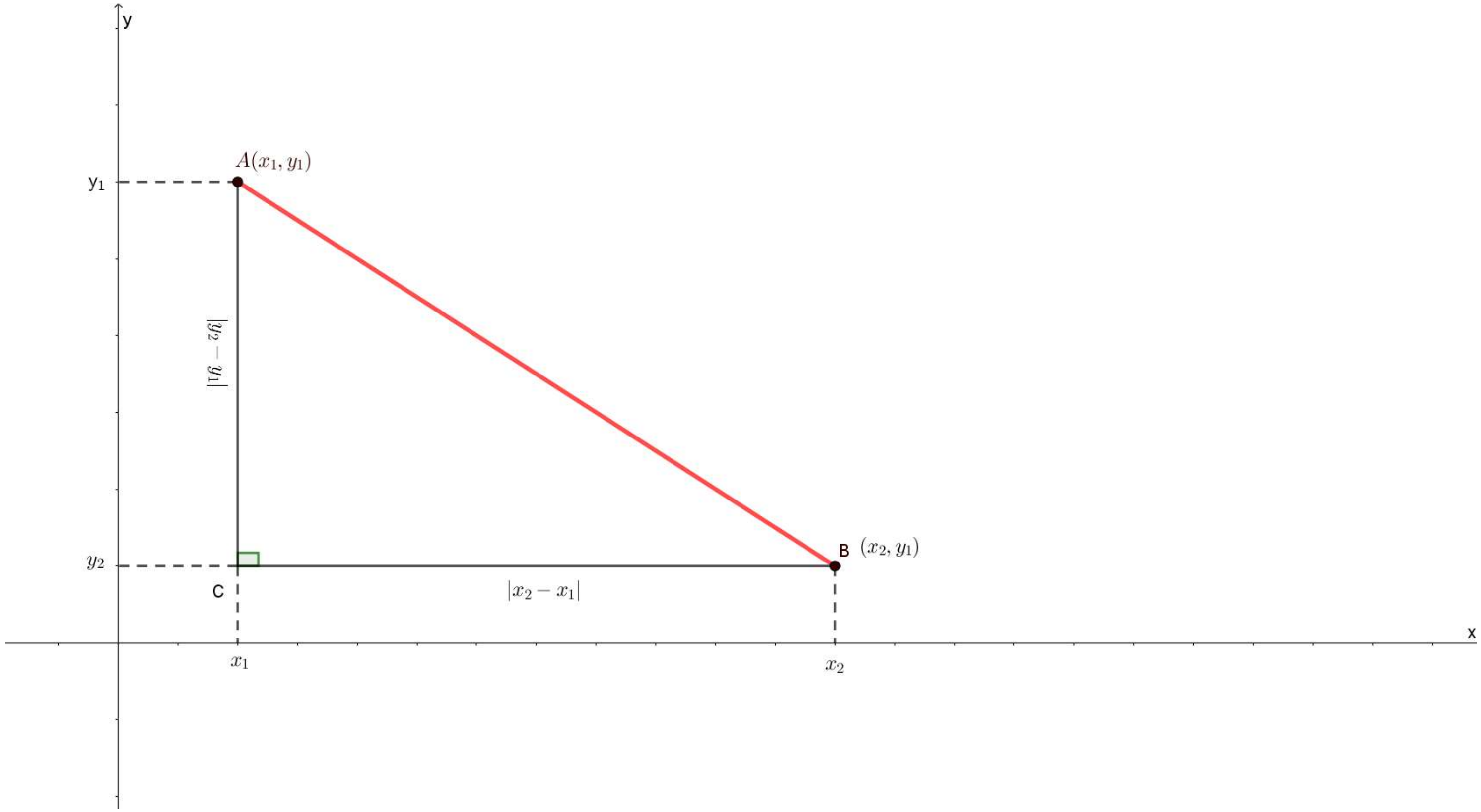
Bevis(punkt – punkt formlen) forsat

1) Vi aftegner punkterne A og B i koordinatsystemet.
2) Vi aftegner dernæst hjælpepunktet C.
3) Herefter hjælplinjerne |BC| og |AC|, som sammen med |AB| danner den retvinklede trekant, ABC.
4) Efterfølgende udtrykkes |AB| ved hjælp af Pythagoras.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

Analytisk Geometri

Bevis (Afstand punkt til punkt).



Analytisk Geometri

Bevis (punkt til punkt fortsat).

5) Vi erstatterne dernæst |AC| og |BC| med størrelserne $|x_2 - x_1|$ og $|y_2 - y_1|$:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Analytisk Geometri

Bevis (punkt til punkt fortsat).

6) Slutteligt tages kvadratroden på begge sider.

$$|AB| \quad = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Hermed er sætningen bevist. ▫

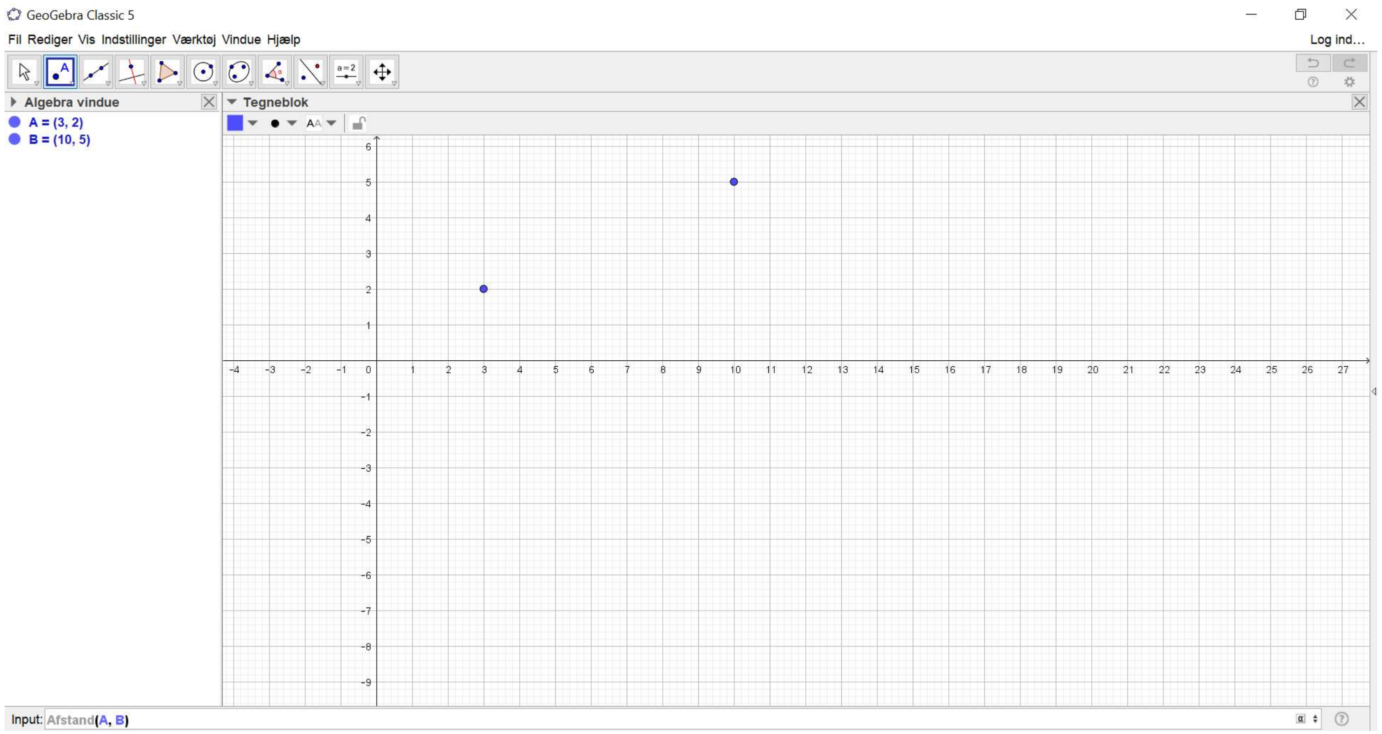
(NB! Det antages, at AB ikke parallel med akserne).

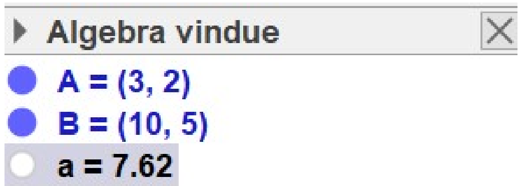
Se side 173, Kernestof 2.

Analytisk Geometri

I Geogebra defineres punkterne (se manual).

Herefter anvendes kommandoen Afstand().





Opgaver

Opgave 1113, Kernestof2, side 177

Analytisk Geometri

Afstand punkt til linje.

Vi er også interesseret i at finde den vinkelrette afstand fra en linje l til et punkt P.

Dette kan udtrykkes $dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_0 + b - y_0|}{\sqrt{a^2+1}}$

Dette kaldes distance-formlen.

Analytisk Geometri

Bevis(punkt til linje formel)

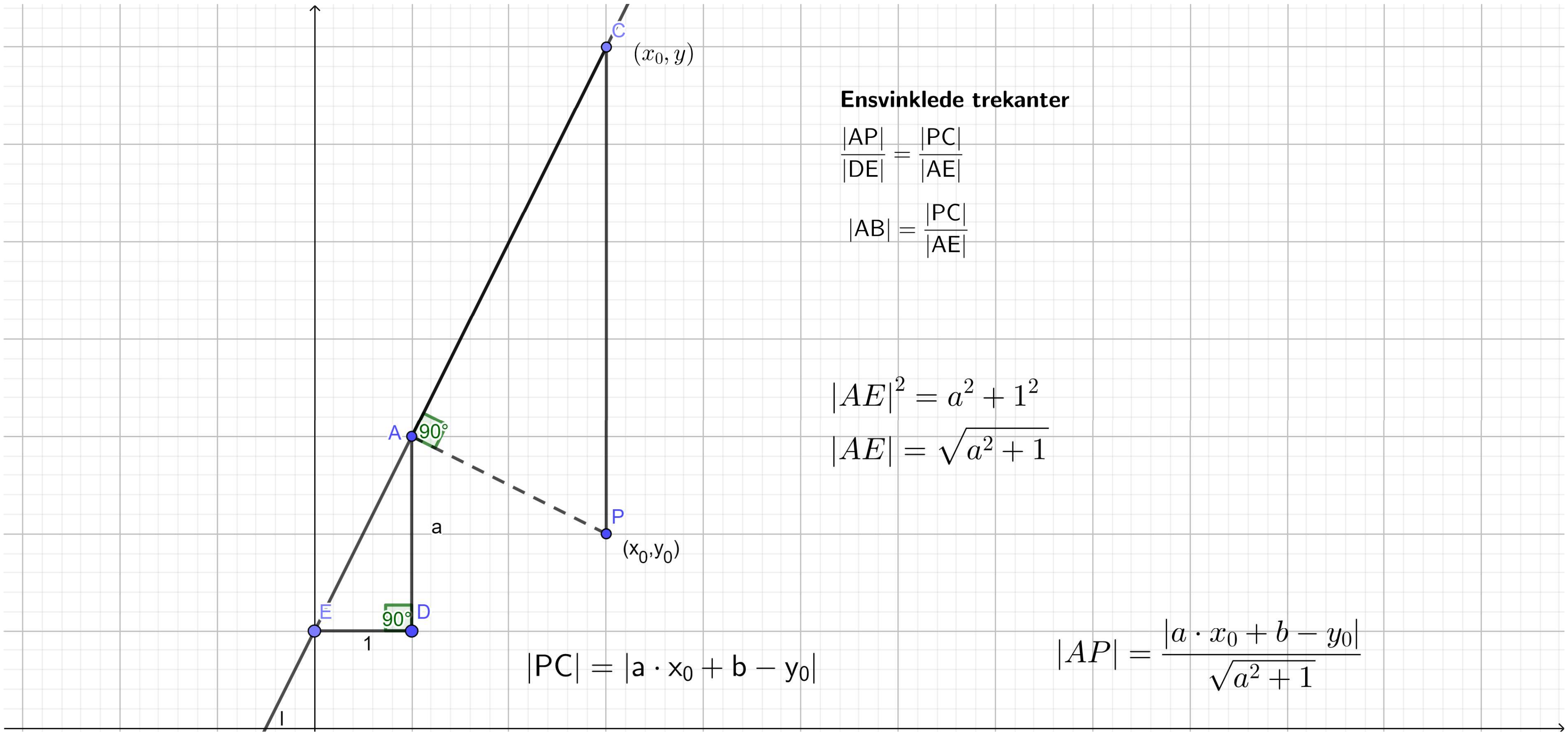
1) Vi tegner en linje $y = a \cdot x + b$ hvor a > 0, og et punkt $P(x_0, y_0)$.

2) Herefter indtegnes den vinkelrette afstand (P,l).

3) Vi tegner dernæst en retvinklet trekant ved at indtegne et punkt E og et punkt A på linjen samt punktet D. Trekanten hedder ADE.

4) Efterfølgende tegnes en anden retvinklet trekant ACP med udgangspunkt i A.

Analytisk Geometri



Analytisk Geometri

Bevis fortsat

5) Det ses at de 2 trekanter er ensvinklede, og derfor gælder følgende.

$$\frac{|AP|}{|DE|} = \frac{|PC|}{|AE|}$$

6) Vi isolerer afstanden |AP|, så $|AP| = |DE| \cdot \frac{|PC|}{|AE|}$

Analytisk Geometri

Bevis fortsat

7) Vi ved at afstanden |DE| = 1 og derfor:

$$|AP| = \frac{|PC|}{|AE|}$$

8) Afstanden kan $|\mathrm{AE}|$ bestemmes vha. Pythagoras-sætning.

$$|AE| = \sqrt{a^2 + 1}$$

Analytisk Geometri

Bevis fortsat

9) Vi bestemmer herefter afstanden |AP|.

Da punktet E og P har samme y-koordinat, så kan vi bestemme afstanden |PE|, som forskellen mellem y-koordinaterne.

$$|PC| = |a \cdot x_0 + b - y_0|$$

Analytisk Geometri

Bevis fortsat

10) Til slut anvendes det er trekanterne er ensvinklede.

$$|AP| = \frac{|PC|}{|AE|} = \frac{|a \cdot x + b - y_0|}{\sqrt{a^2 + 1}} = dist(P, l)$$

Hermed er sætningen bevist ▫

Opgaver

Opgave 1115 – 1116, side 177-178, Kernestof 2.