Undervisning

Tal og bogstaver.

Lidt om tal.

- 4 typer af tal.
- Naturlige tal, Symbol og eks.
- $\mathbb{N}$ = {1,2,3,….}

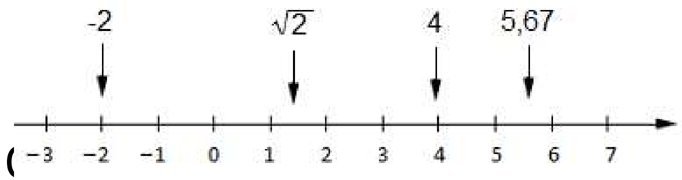
- De hele tal, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1,2,\dots\}$

Rationelle tal, er "brøk-tal".

- $\mathbb{Q} = \frac{p}{q}, q \neq 0$

- Irrationelle tal, er tal som ikke kan skrives som en brøk.
- Eksempel {e, π,ln(2),….}

- Samles i de relle tal $\mathbb{R}$.



Vigtigt symbol: $5 \in \mathbb{R}$. (Betyder at 5 tilhører mængden af reelle tal).

Intervaller.

- En tallinje udtrykkes ud fra såkaldte intervaller.

- Interval angives med [],] eller [.

Eksempel på interval.

- Åbent: $]a; b[$
- Halvåbent $]a; b]$ eller $[a; b[$
- Lukket: $[a; b]$

Alternativ notation for intervaller.

- Åbent: $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 3\}$

- Halvåbent : $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$

- Halvåbent : $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3\}$

- Lukket: $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$

De elementære regnearter.

De 4 elementære regnearter.

+ : plus. (addition).

- : minus. (subtraktion).

/: dividere. (division)

$*$: gange. (multiplikation).

Regnearternes hierarki.

- At fastlægge i hvilken række et regnestykke skal udregnes.

Eksempel:

$$3 \cdot 4 + 2 = ?$$

$$3 \cdot 4 + 2 = 18$$

eller

$$3 \cdot 4 + 2 = 14$$

Regnearternes hierarki fortsat.

- Det rigtige svar er selvfølgelig.

$$3 \cdot 4 + 2 = 14$$

- Man ganger først faktorerne sammen.

$$3 \cdot 4$$

- Herefter lægges led til.

$3 \cdot 4 + 2$ = 14

Eksempel 2

$$18 : 2 \ - 1 = 8$$

(bemærk at division skrives her ":")

Eksempel 3

$$20 - 6 + (4 - 2) : 2 = 15$$

(Bemærk, hvis jeg dividere hvert led i parentesen med 2, så fås samme resultat.)

$$20 - 6 + 4 : 2 \ - 2 : 2 = 15$$

Regnearternes hierarki fortsat.

Generelt

- Først udregnes rødder, potenser og faktorerne.
- Dernæst addition eller subtraktion af led.

Regninger med parenteser.

Vi så i eksempel 3, udtryk kan bestå af bla. Led i en parentes.

$$20 - 6 + (4 - 2): 2$$

Dette kan skrives

$$20 - 6 + (4 - 2) \cdot \frac{1}{2}$$

Regnearternes hierarki fortsat

Eksempel fortsat

$$20 - 6 + (4 - 2) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$20 - 6 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

Tallet $\frac{1}{2}$ kaldes en ”fælles faktor.”

Den ganges på hvert led i parentesen.

Om parenteser

Parenteser udregnes først, og herefter led.

Eksempel 4

$$\begin{aligned} 2 - 3 \cdot (4 + 5) &= 2 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ &= 2 - 12 - 15 \\ &= -25 \end{aligned}$$

Regning med parenteser

Egenskaber for +, -.

- $+ \cdot + = +$
- $+ \cdot - = -$
- $- \cdot + = -$
- $- \cdot - = +$

At ophæve parenteser.

Når man ophæver en parentes, så ses på fortegnet udenfor parentesen.

Eksempel 5

$$2-(3+4)=2-3-4=-5$$

Eksempel 6

$$2+(3+4)=2+3+4=9$$

Med andre ord parentesen udregnes før led.

Regnearternes hierarki fortsat.

Når man arbejder med matematiske udtryk, så kan man også støde på udtryk hvori kvadratrod og potenser indgår.

Eksempel 7

$$2^2 - \sqrt{4} \cdot (2+3) = 4 - 2 \cdot (2+3) = 4 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -6$$

Bemærk venligst, at potenser og kvadratrødder udregnes før faktorer og led.

Regnearternes hierarki fortsat.

Den komplette liste regnearternes hierarki.

- Parenteser udregnes.
- Potenser/ kvadratrødder udregnes.
- Multiplikation/division med faktorer.
- Addition/subtraktion af led.

Opgaver.

Side 22, Kernestof Mat1 HF. Opgave 1-4.

Regnearternes hierarki med bogstaver.

Regning med bogstaver

- Bogstaver og tal har samme egenskab.
- $a + a = 2 \cdot a$
- $a \cdot a \quad = a^2$
- $a + b = a + b = b + a$
- $\frac{a^4}{a^2} \qquad = a^{4-2} = a^2$
- $a \cdot b \quad = \quad b \cdot a$
- $\sqrt[n]{a^n} \quad = a$

Bogstaver og parenteser.

Eksempler $8 + 9$

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot (a + b) = a + b \cdot a + b^2$$

$$= \quad a + a \cdot b + b^2$$

$$a - b \cdot (a + b) \ = a - b \cdot a - b^2$$

$$= a - a \cdot b - b^2$$

Kvadratsætningerne

- To parenteser ganges sammen ”ledvis”.

$$(a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$

- Leddene ”samles”.

$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2 = \; a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$$

Dette kaldes også første kvadratsætning.

Kvadratsætningerne fortsat.

2. kvadratsætning. (Bevis)

$$(a-b)\cdot(a-b)=(a-b)^2=$$

$$a\cdot a-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b\ =\ a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\ \square$$

3. kvadratsætning. (Bevis)

$$(a-b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b\ -b\cdot a\ -b\cdot b=a^2-b^2\ \square$$

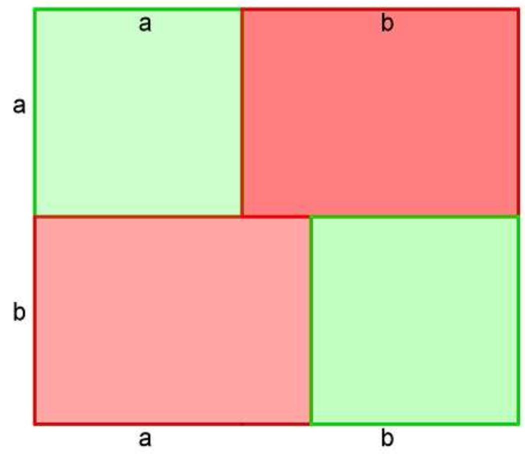
Kvadratsætningerne fortsat

Sætning: Kvadratsætning 1. (grafisk bevis).

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Bevis.

Der er givet et kvadrat som det til højre.



Kvadratsætningerne fortsat

Bevis fortsat

Areal af det store kvadrat er $\mathrm{A} = (a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$

Arealet af det første grønne kvadrat: $\mathrm{A}_1 = a \cdot a = a^2$

Arealet af det af andet grønne kvadrat: $\mathrm{A}_2 = \mathrm{b} \cdot b = b^2$

Kvadratsætningerne fortsat

- Bevis fortsat

Arealet af det røde rektangel: $\mathrm{A}_3 = a \cdot b$

Arealet af det lyserøde rektangel: $\mathrm{A}_4 = \mathrm{b} \cdot a$

Arealet af det store kvadrat: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Kvadratsætningerne fortsat

Bevis fortsat

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Derfor kan arealet af det store kvadrat nu skrives.

$$(a+b)^2 = a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b + b \cdot a = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \quad \square$$

Opgaver

Side 22, Kernestof Mat1 HF. Opgave 10-11.

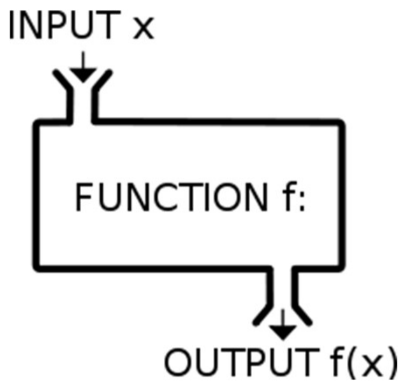
Side 23, Kernestof Mat1 HF. Opgave 12- 17.

Undervisning 2

Funktioner

Funktioner 1.

Vi ved fra tidligere, at en funktion er en maskine som tager et input og et output.



Inputtet kaldes x og outputtet skrives f(x) (udtales f af x).

Funktioner 1.

Eksempel på en funktion:

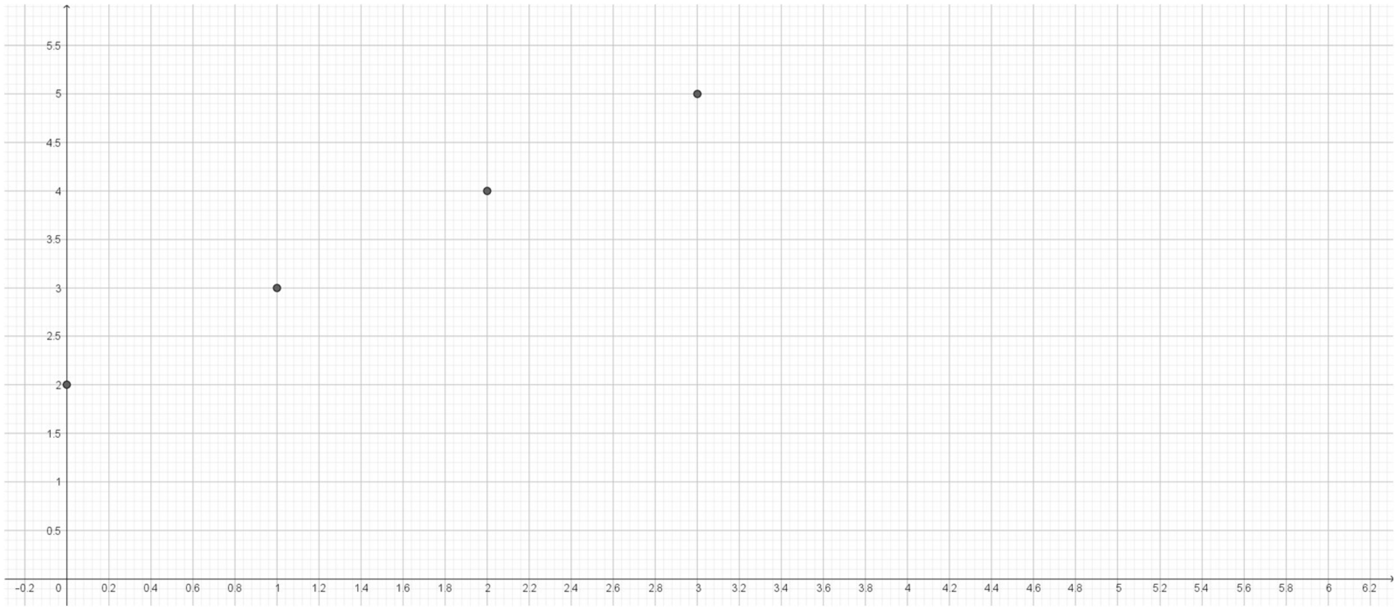
$$f(x) = x + 2$$

Vi indsætter intervallet $[0; 3]$ i funktionen og vi den tilhørende funktionsværdier. Disse indsættes i en tabel nedenfor.

x	0	1	2	3
f(x)	2	3	4	5

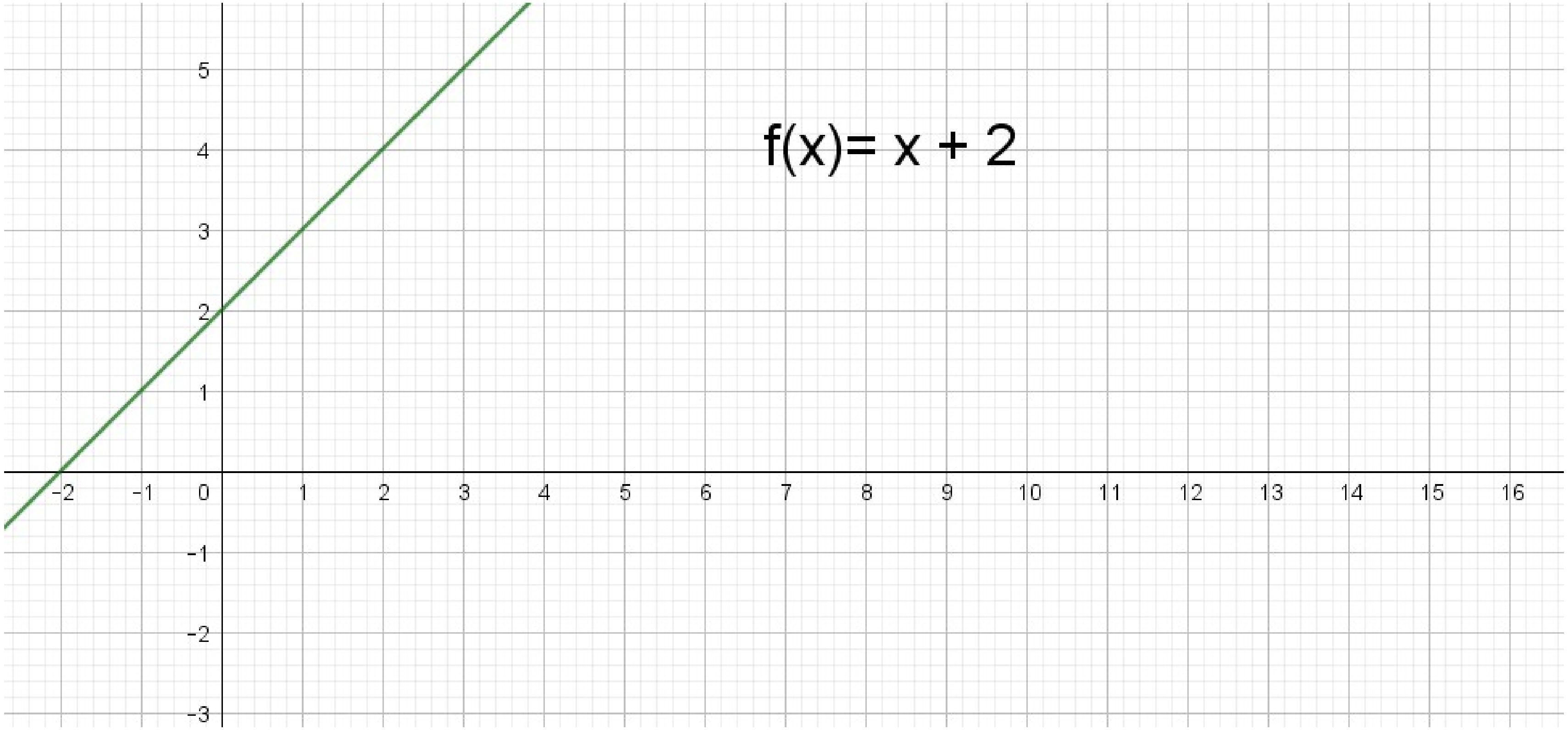
Funktioner 1.

Værdierne indsættes i et såkaldt punktplot, hvor x-værdierne er vandret og y-værdierne f(x) er lodret.



Funktioner 1.

Vi kan også lave en graf for funktionen hvor punkterne ikke vises.



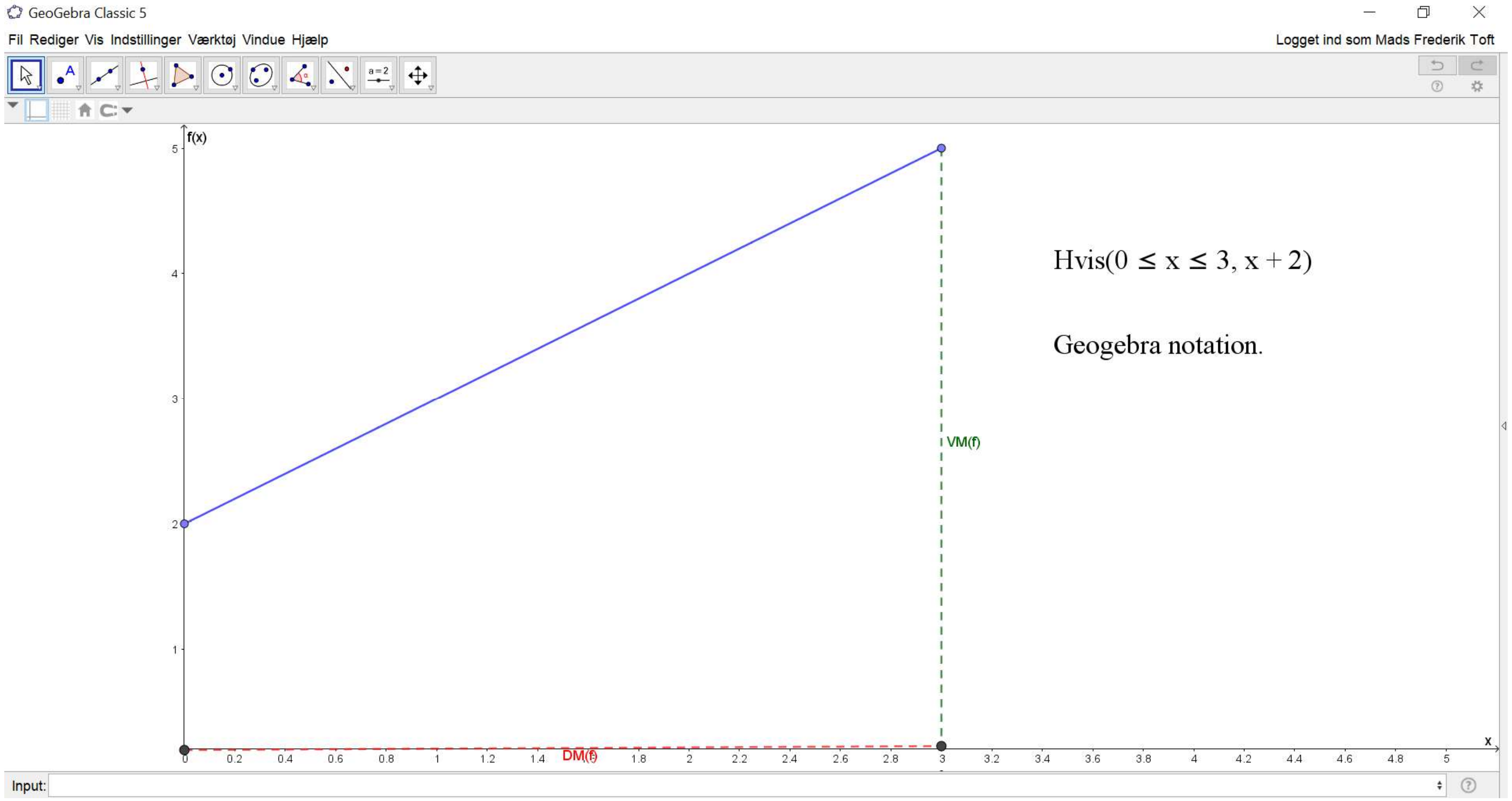
Funktioner 1.

De værdier man kommer ind i funktionen kaldes funktionens "Definitionsmængde". Den skrives Dm(f).

De værdi der kommer ud af funktionen kaldes funktionens "Værdimængde". Dette skrives Vm(f).

Funktioner 1.

Defintionsmængde og Værdimængde kan illustreres således.



Funktioner 1.

Funktion uden begrænsninger.

Funktionen $f(x) = x + 2$ kan dog modtage alle reelle tal, idet funktionen ingen begrænsninger har.

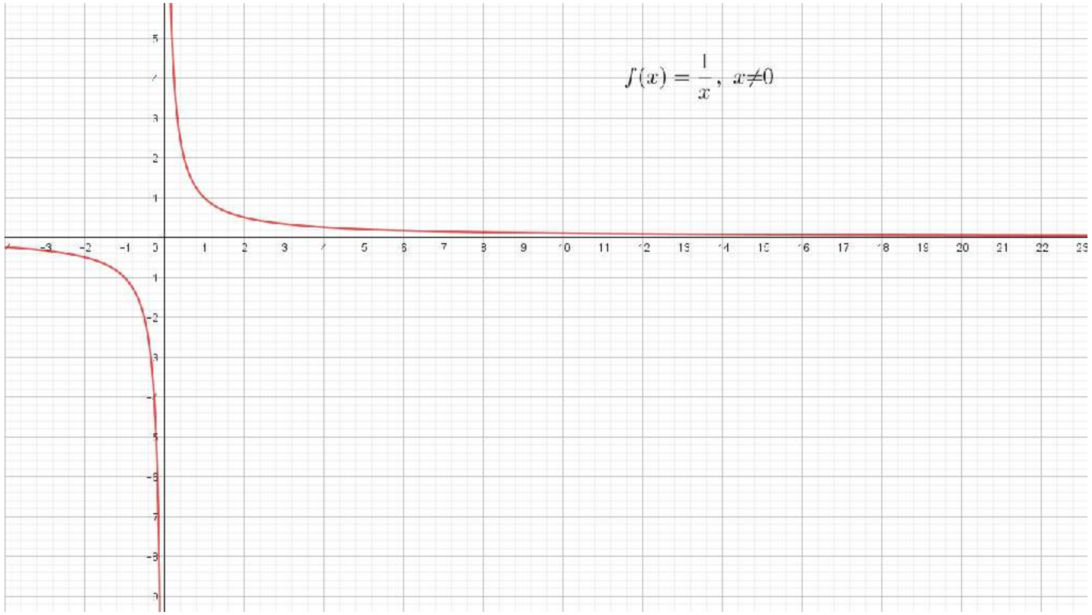
$$Dm(f) = \mathbb{R}$$

$$Vm(f) = \mathbb{R}$$

Funktioner 1.

- En funktion med begrænsning.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

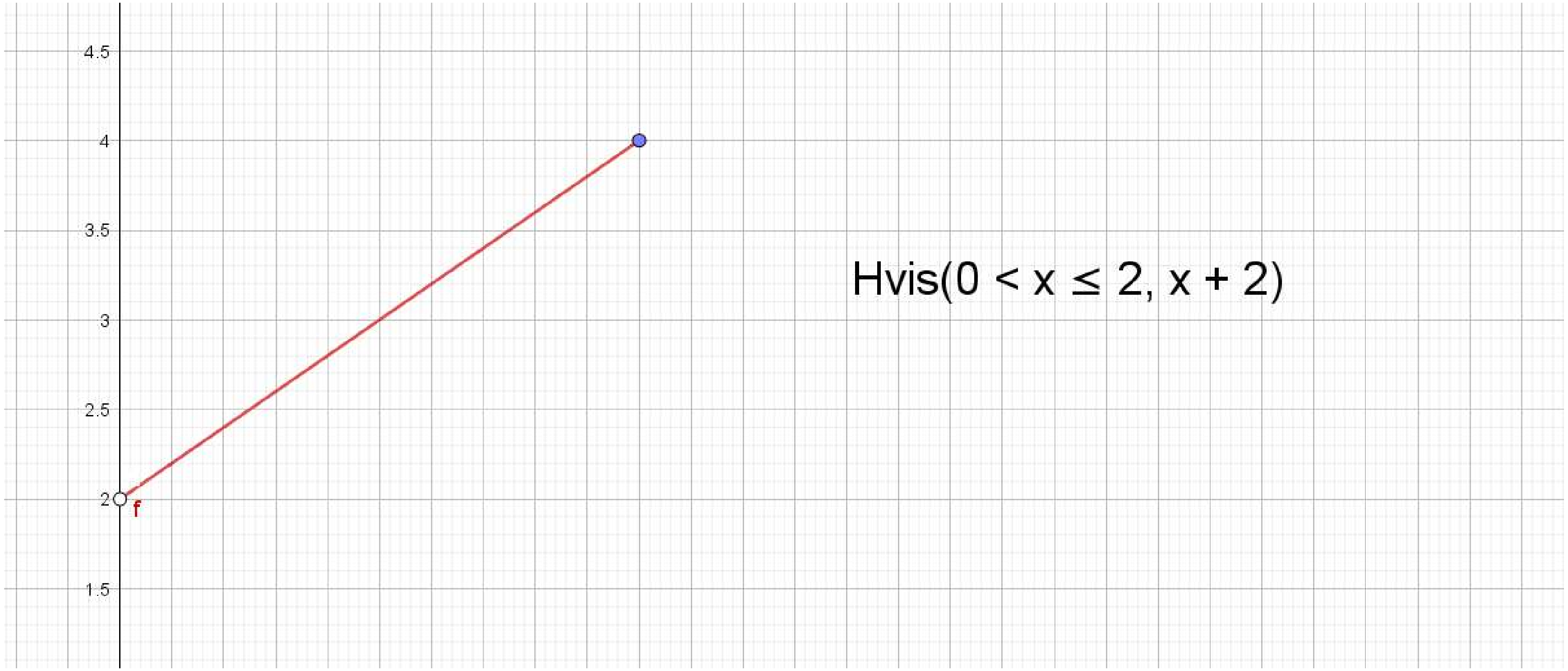


$Dm(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
(Man siger alle reelle fraregnet nul.)

$Vm(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Man siger alle reelle fraregnet nul.

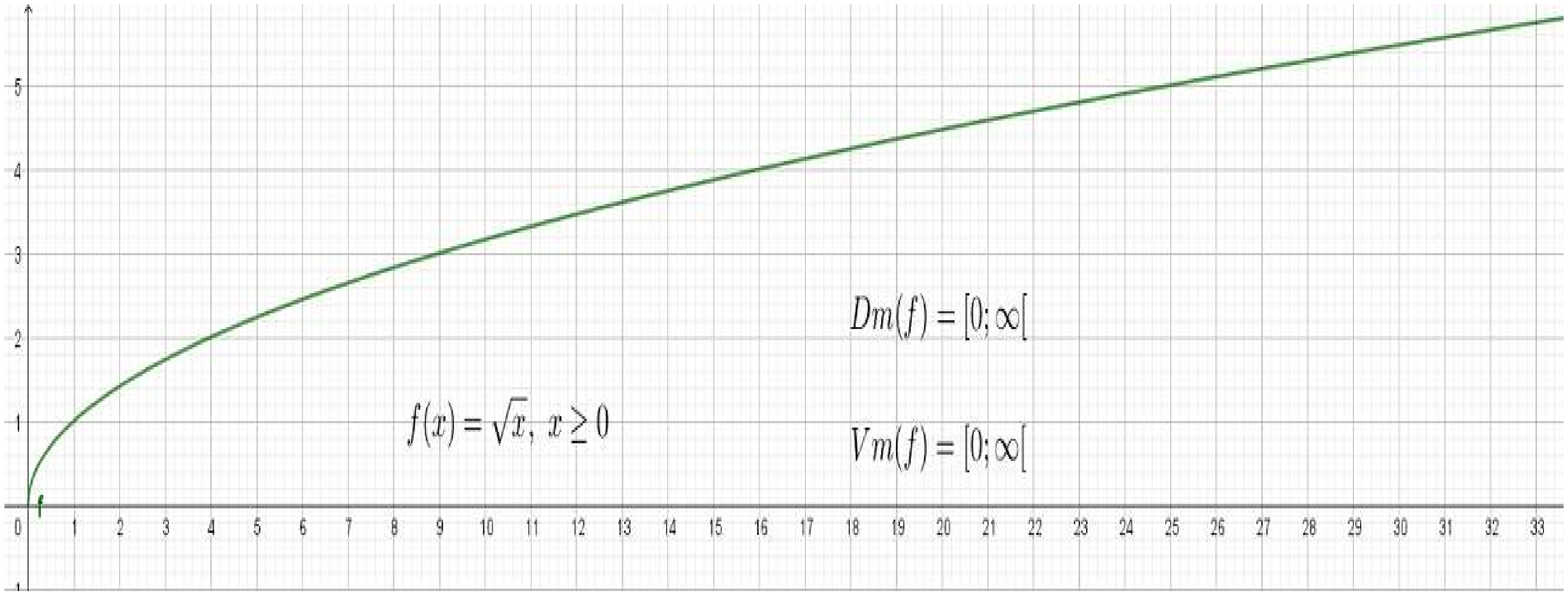
Funktioner 1.

Geogebra: At begrænse funktions Dm(f).



Funktioner 1

Eksempel: Funktion med begrænsninger.



Opgaver

Kernestof Mat 1, Øvelse 9 + 10 side 193.

Undervisning 3

Funktioner

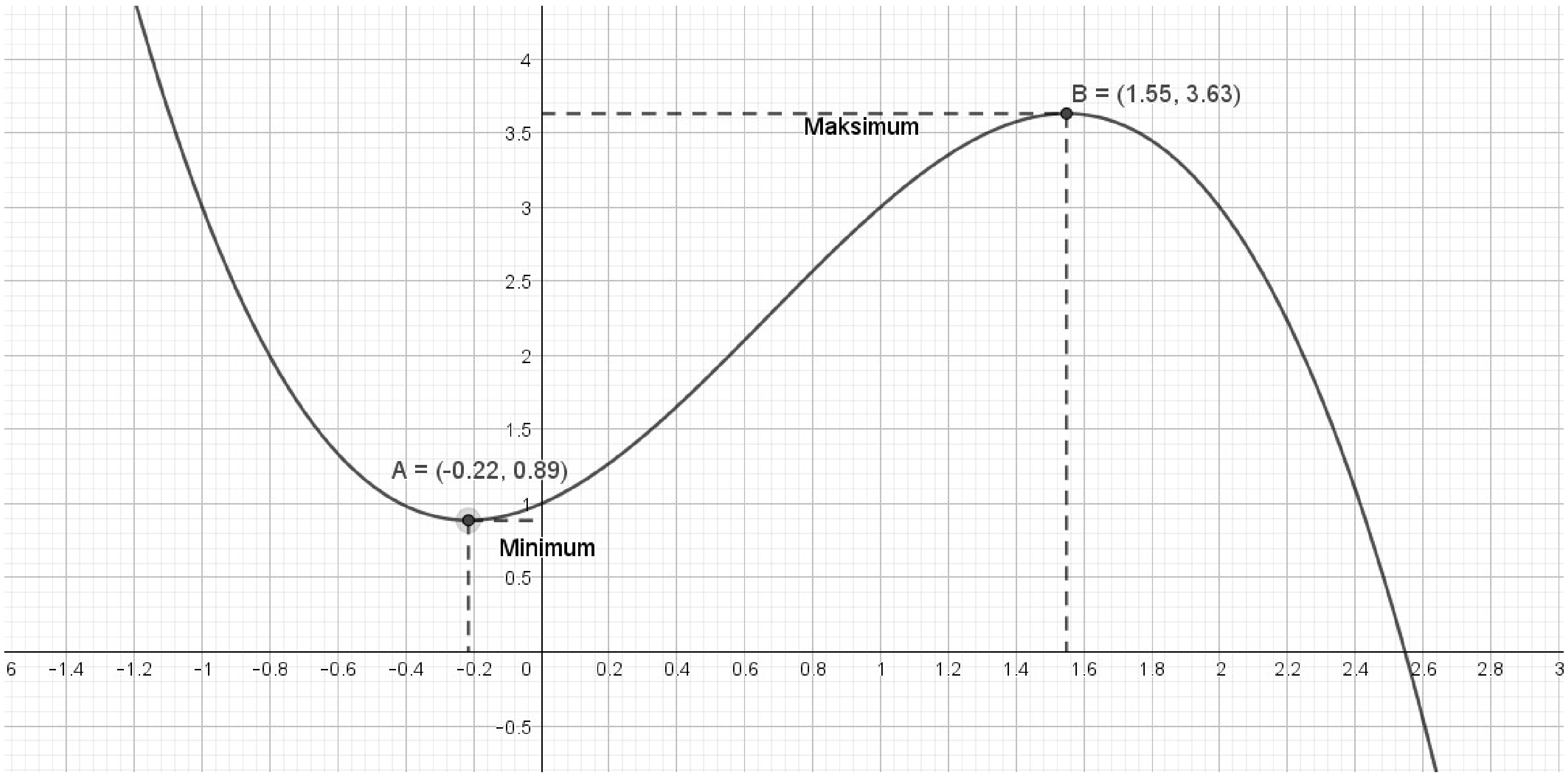
Funktioner 1

En funktion $f(x)$ med defintionsmængde $Dm(f)$ og værdimængden $Vm(f)$ er givet.

Den maksimale y-værdi, som en funktion opnår på et givet interval kaldes funktionens maksimum.

Den minimale y-værdi, som en funkti0on når på et given interval kaldes funktionens minimum.

Funktioner 1 (Eksempel på funktion)

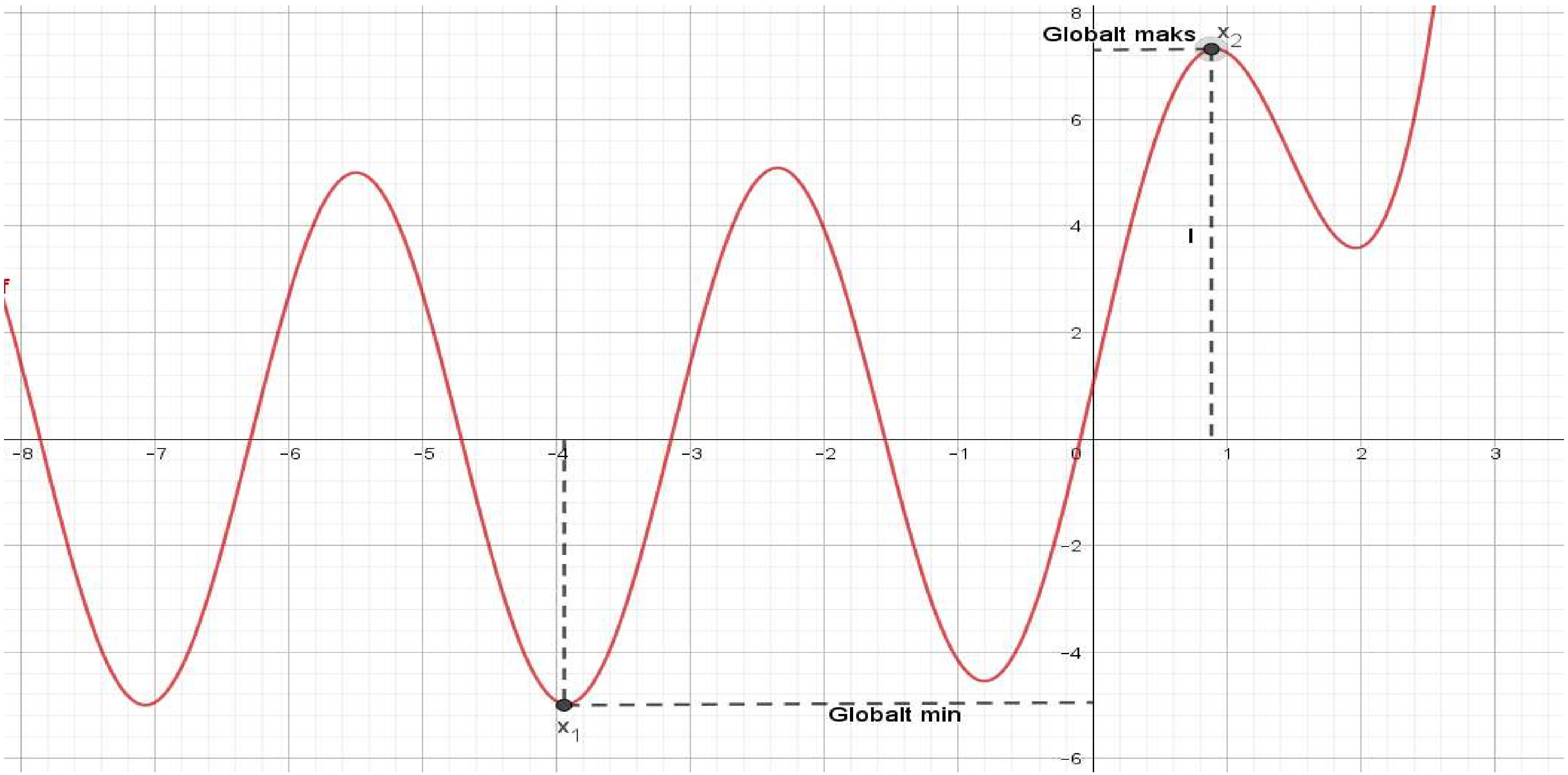


Funktioner 1

Definition af globalt maksimum og globalt minimum

- En funktion *f* siges at have *globalt maksimum* i et tal x_2, hvis $f(x_2)$ er større end alle andre funktionsværdier.
- Tilsvarende siges *f* at have *globalt minimum* i et tal x_1, hvis $f(x_1)$ er mindre end alle andre funktionsværdier.

Funktioner(Eks Global maks og min)

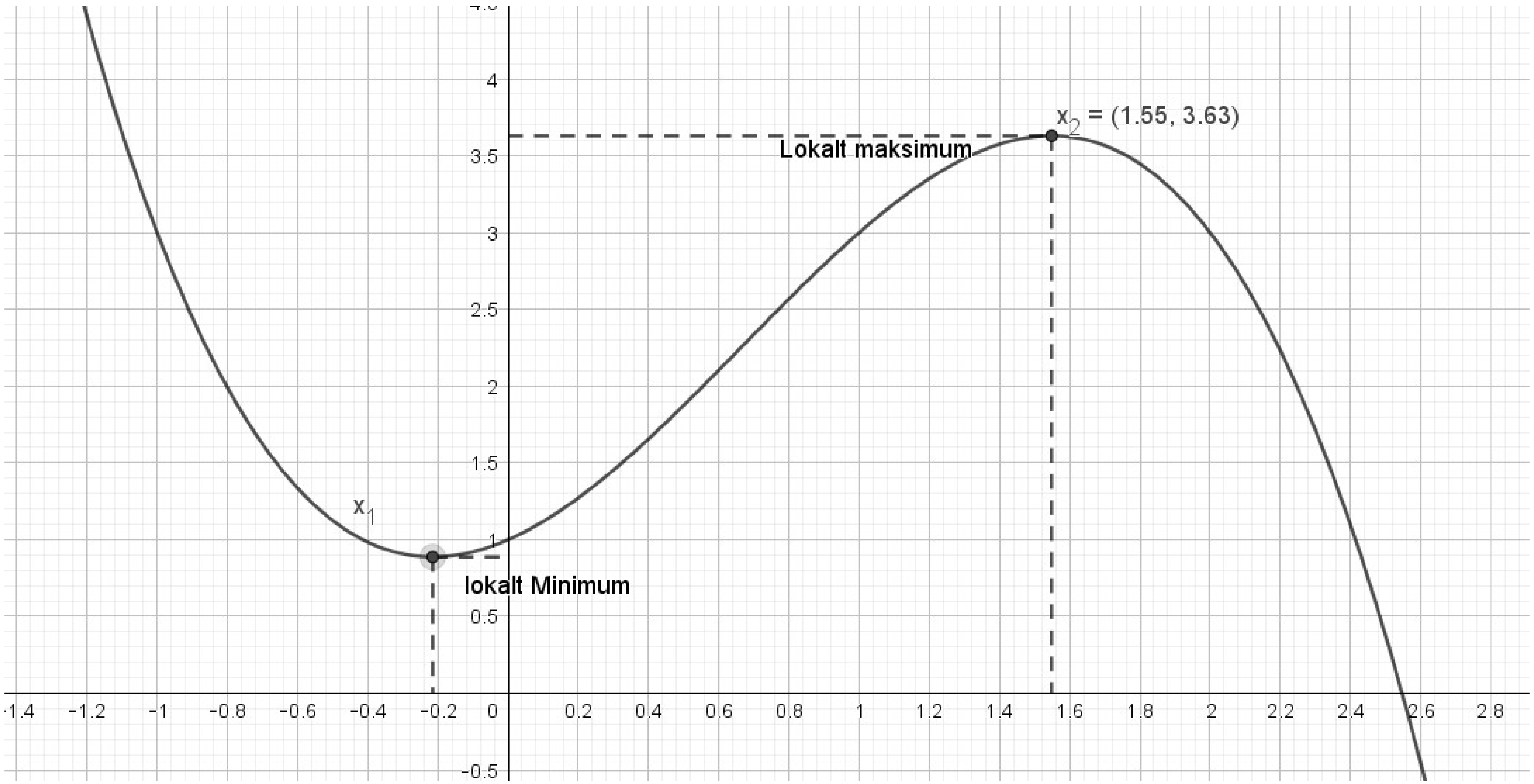


Funktioner 1.

Definition af lokalt maksimum og lokalt minimum

- En funktion f siges at have *lokalt maksimum* i et tal x_3, hvis $f(x_3)$ er den største funktionsværdi i et lille interval omkring x_3.
- På tilsvarende defineres et lokalt minimum.

Funktioner 1 (Eks lokal mak og min)



Funktioner 1 fortsat

Kommando til at finde maksimum i Maple.

Eksempel: Find maksimum for $f(x) = -x^3 - 2 \cdot x + 2$

maximize(-x^3-2*x+2, location, x = -1 .. 1)

2.088662108, {[{x = .8164965809}, 2.088662108]}

Maple returner maksimumsstedet x = 0.82 samt

Maksimumsværdien i det sted y = 2.08.

Opgaver

Kernestof Mat1 HF, Øvelse 19 + 20 side 195.