Undervisning 3

Lineære funktioner

Funktioner 1

Hvad er en model? En model er matematikerens måde at udtrykke virkelighedens problemstilling på.

Eksempel. Josefine køber colaer til sine klassekammerater til 20 kroner pr. Styk.

Udgift til cola = $20 \cdot x$, hvor x er antal klassekammerater og 20 er prisen pr. Cola.

Funktioner 1

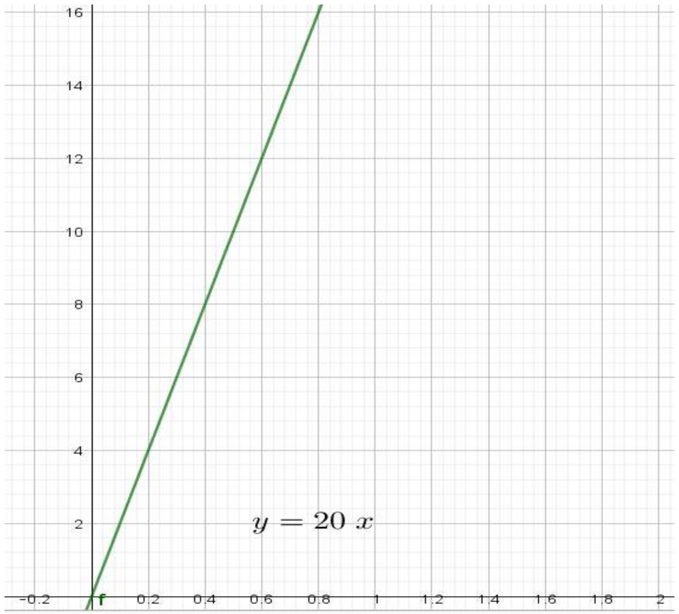
Definition: Ligefrem propotionalitet.

- Hvis en model kan udtrykkes $y = k \cdot x$, hvor k er fast tal. Så siges y at være ligefrem propotional med x.

- Dvs. I eksemplet fra side 2, at antallet af købte cola'er er ligefrem propotionalt med prisen kroner.

Funktioner 1

Grafen for en ligefrem proptionale sammenhæng mellem udgift på cola og antal købte colaer.



Funktioner 1

Definition: Omvendt Propotionalitet.

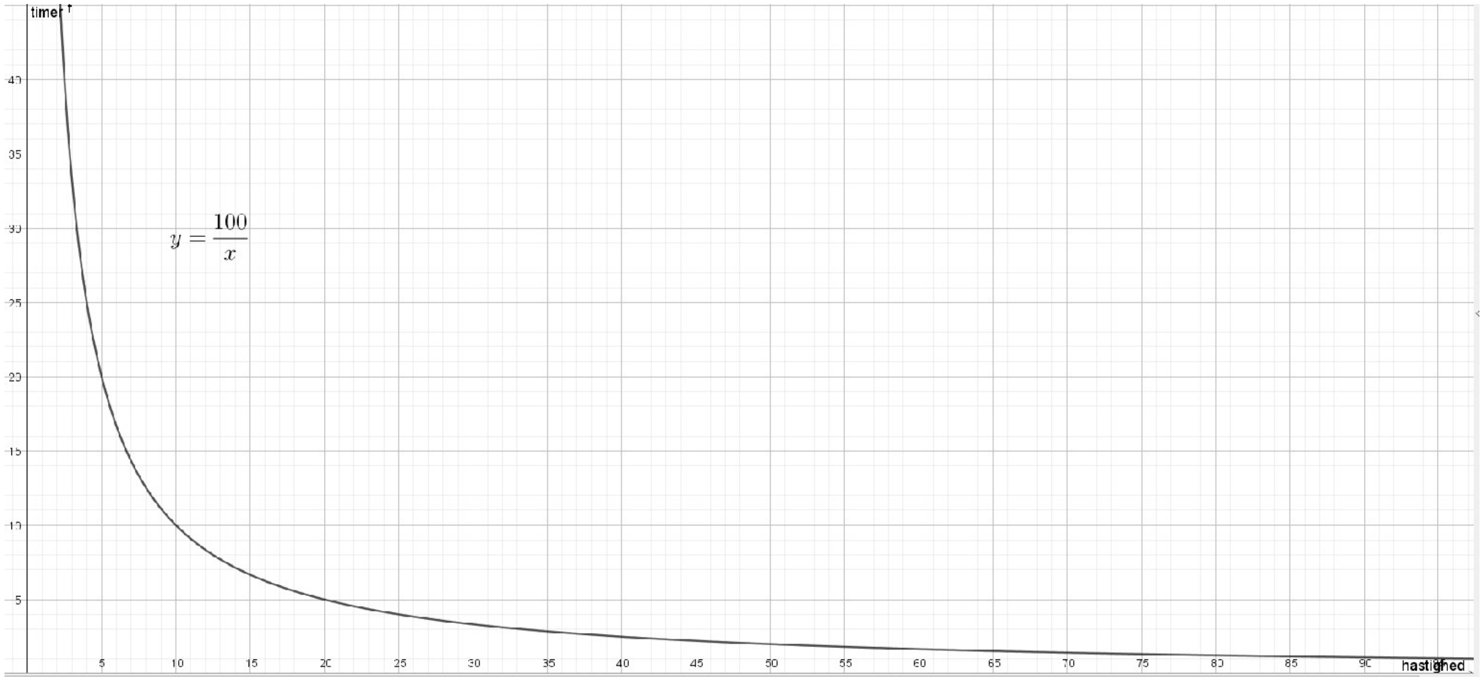
Hvis en sammenhæng mellem x og y kan skrives
$x \cdot y = k$, hvor k er et tal. Så siges x og y at være omvendt propotionale.

Eksempel: Signe kører 100 km af en lige strækning, og antag at jo hurtigere hun kører desto kortere tid tager turen. Hvis x er hendes hastighed og y antal timer turen tager.
Så kan sammenhængen beskrives: $x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$

Dvs. hvis Signe køre 100 km/t, så tager turen $\frac{100\ km}{100\ km/t} = 1$ time.

Funktioner 1

Med andre ord, så er Signe's hastighed omvendt propotionalt med den tid turen tager i timer.



Opgaver

Øvelse 19, Mat1 s. 163.

Opgave 803 s. 164 Mat1.

Opgave 804, s. 164 Mat1. (spg. a – d).

Funktioner 1

Definition: Lineær funktion.

En lineær funktion er en funktion $f(x) = a \cdot x + b$ (udtryk)

- b er skæringen med y-aksen og a er hældningstallet.
- x kaldes den uafhængige variabel og y kaldes den afhængige variabel.

Funktioner 1

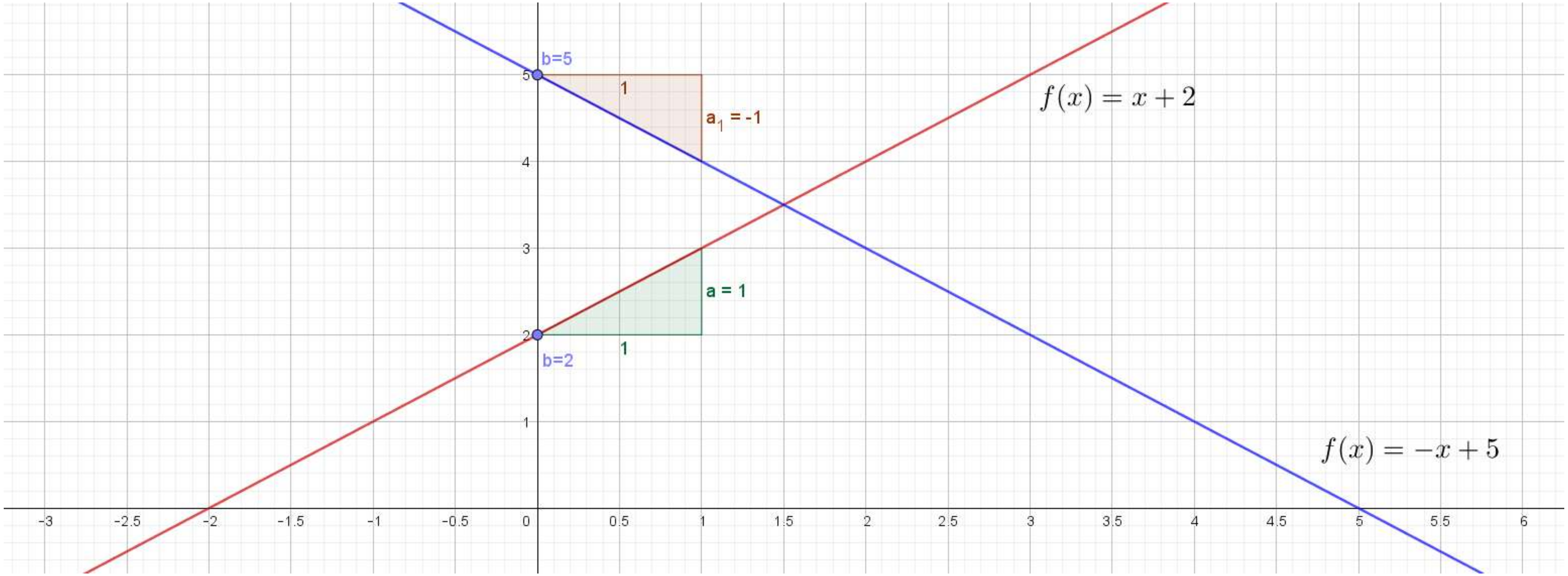
Teori om lineære funktioner.

Sætning: I forskriften $f(x) = a \cdot x + b$, angiver tallet a (hældningstallet), hvor meget y-værdien ændres, når x vokser med 1.

Bevis: Se Mat1 s. 35 midt.

Funktioner 1

Eksempel på grafer for lineær funktioner.



Funktioner 1

Tegning af grafer i Maple og Geogebra.

Maple: Først skrives funktionen f(x):=udtryk

Herefter bruges kommandoen plot.

Eksempel:

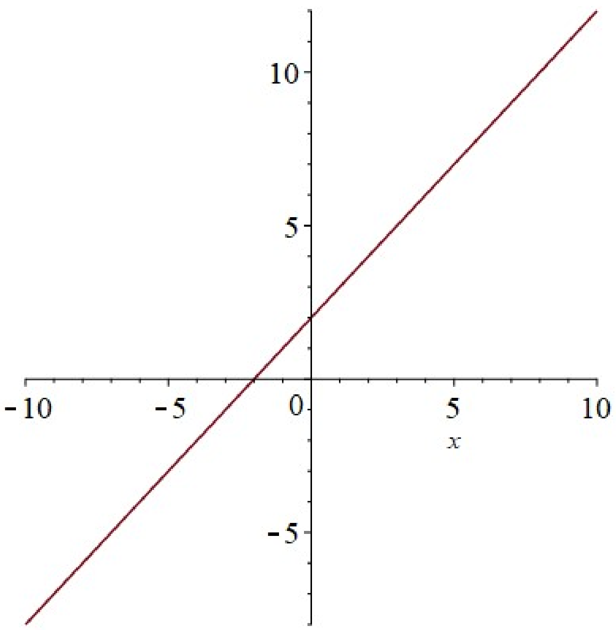
$$f(x) := x + 2$$

$$f := x \rightarrow x + 2$$

$$plot(f(x))$$

Funktioner 1

Eksempel fortsat. (Herefter tegnes grafen for f).

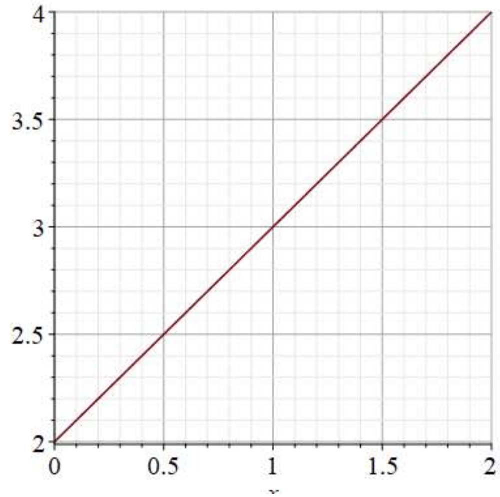


Funktioner 1

Eksempel fortsat. Ekstra muligheder i Maple.

Du kan begrænse grafens x-værdi i Maple, ved nedenstående kommando. Samt tilføje koordinatsystems linjer med kommandoen gridlines.

$$plot(f(x), x = 0..2, gridlines)$$



Funktioner 1: Tegninger af grafer i Geogebra.

Du starter programmet og ser efter feltet

Input:

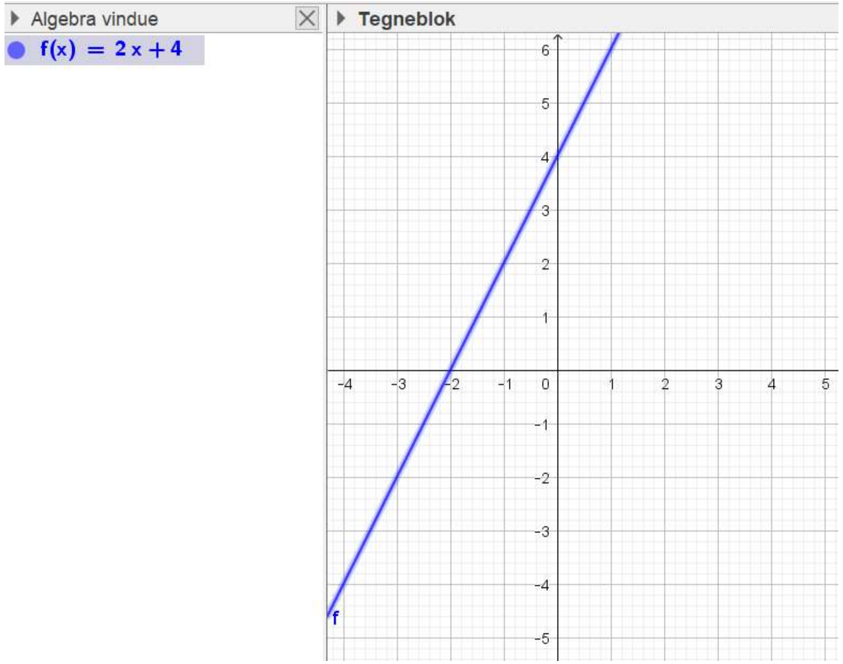
Du indtaster forskriften for funktionen i

Input-feltet.

Funktioner 1

Geogebra:

Funktionens forskrift og graf fremstår så efterfølgende efter et tryk på enter-tasten.



Funktioner 1 Lineære ligninger.

En lineær ligning er en funktion, som er sat lig med enten et tal eller anden funktion.

Eksempel.

$$2 \cdot x + 4 = 8 \cdot x + 2$$

Funktioner 1

Løsning af lineære ligninger.

Når man skal løse en lineær ligning, så laves denne samme regneoperation på b.s. af lig med.

Dvs. hvis man ganger på v.s. af ligningen med 2, så skal du også gange med 2 på højre side af ligningen.

Funktioner 1

Løsning af ligning fortsat.

$2 \cdot x + 4 = 8 \cdot x + 2$ (Ligningen opstilles).

$2 \cdot x - 8 \cdot x + 4 = 8 \cdot x - 8 \cdot x + 2$ (x-erne isoleres på v.s.).

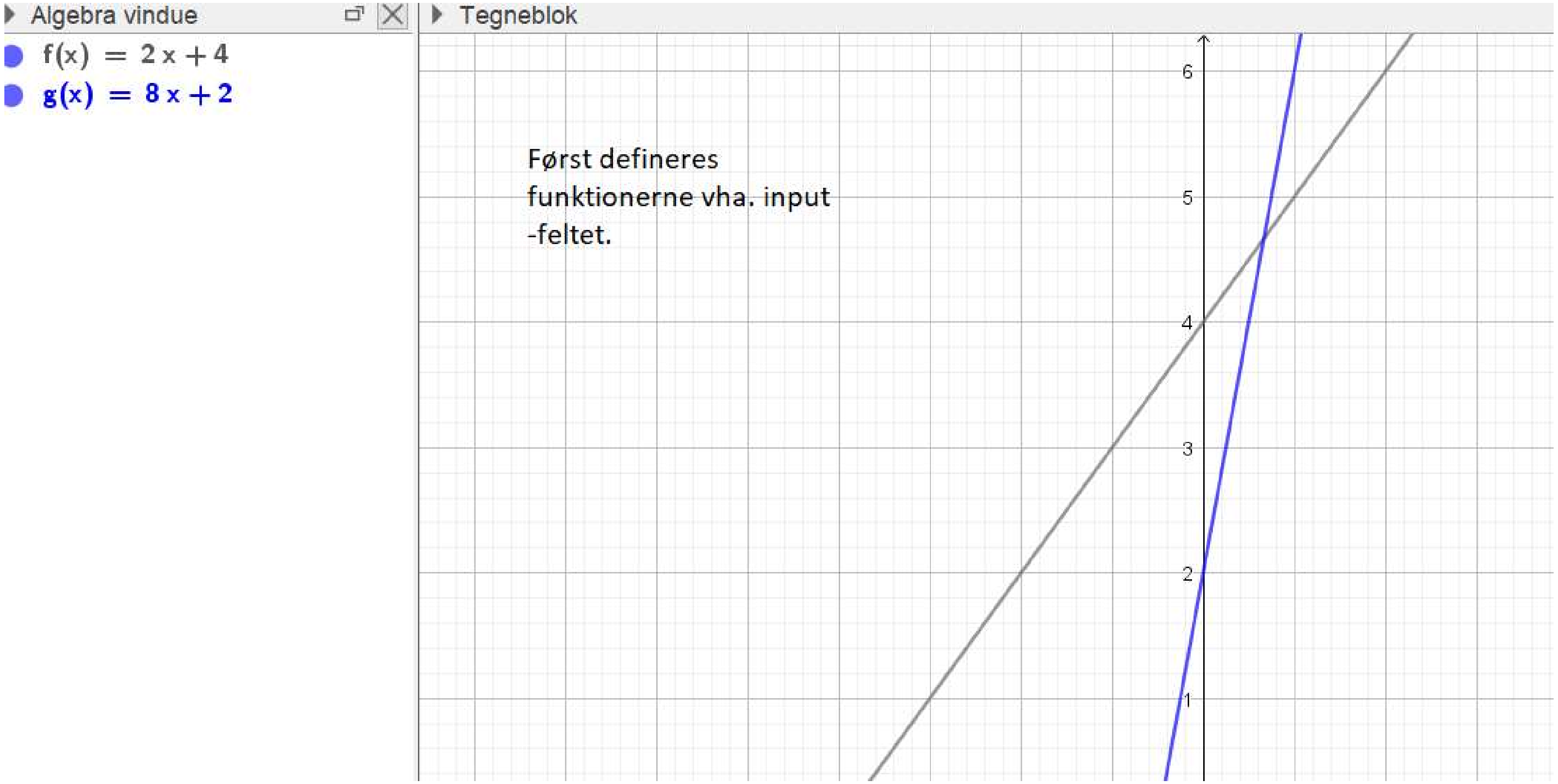
$-6 \cdot x + 4 - 4 = 2 - 4$ (værdierne uden x isoleres).

$-6 \cdot x = -2$ (udtrykket reduceres).

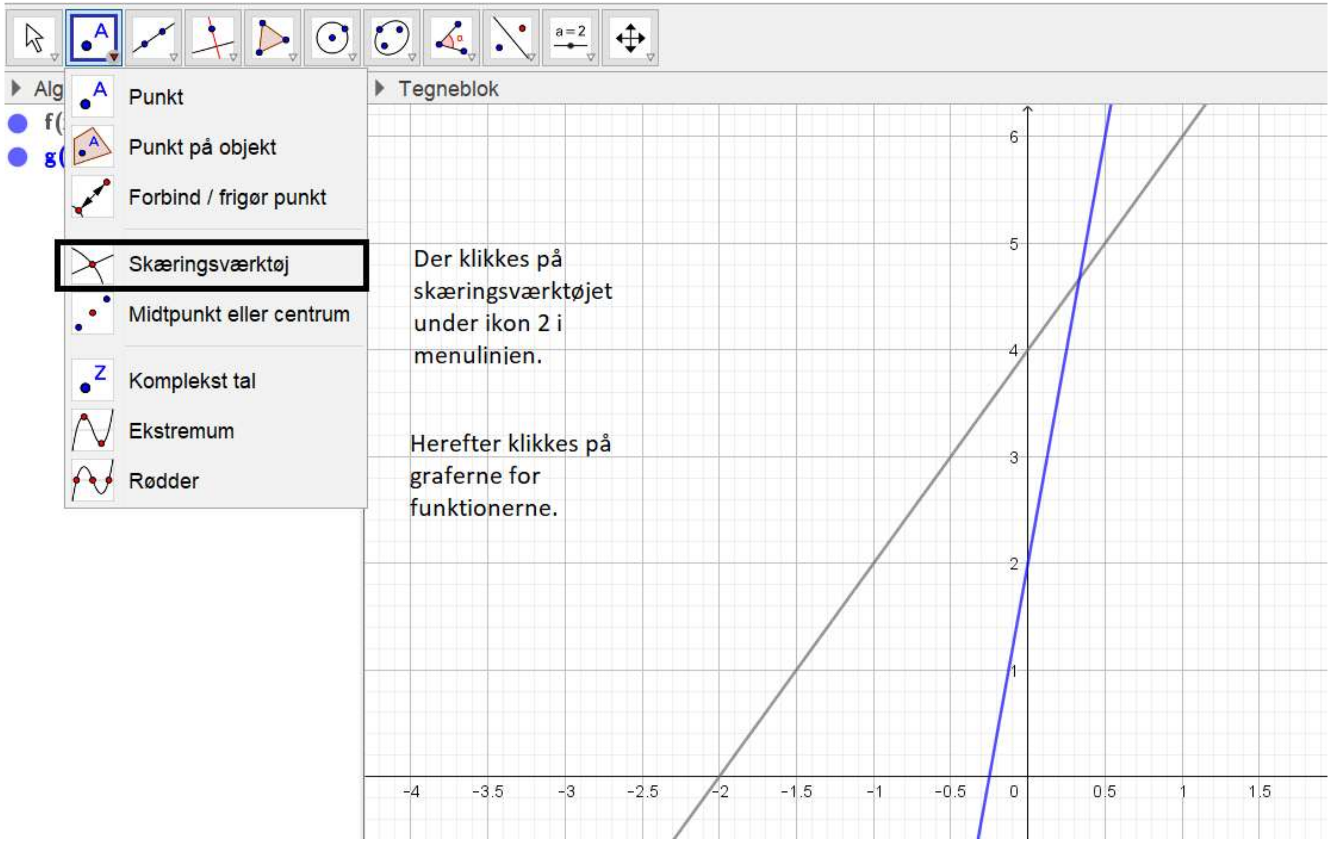
$\frac{-6 \cdot x}{-6} = \frac{-2}{-6}$ (divideres med -6 på b.s.).

$x = \frac{1}{3}$ (Ligningen er løst).

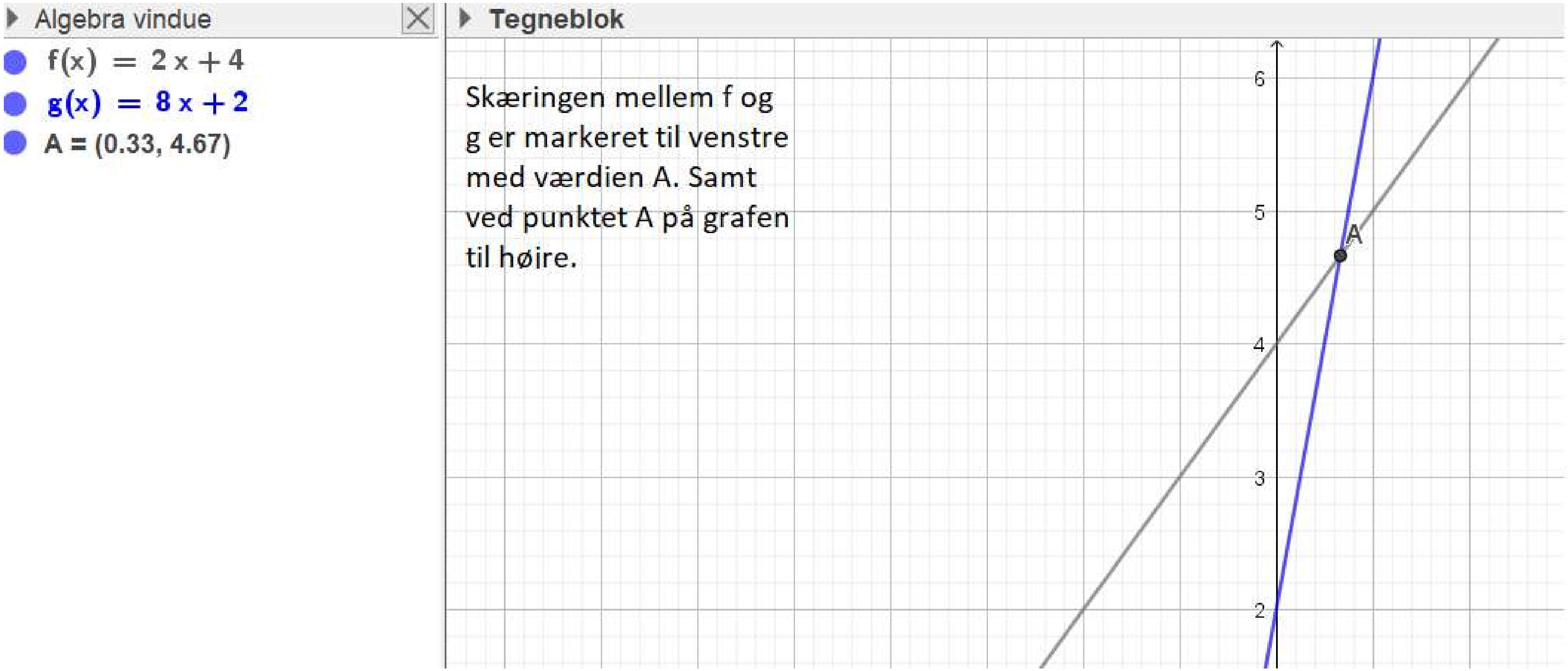
Funktionerne 1 (Grafisk løsning i Geogebra)



Funktioner 1 (Grafisk løsning i Geogebra)



Funktionerne 1(Grafisk løsning i Geogebra).



Funktioner 1 (Løsning i Maple).

Ligninger løses i Maple på følgende. Først defineres ligningerne husk funktioner defineres med ":=" . Hvorefter kommandoen solve anvendes. (Bemærk dog her at i modsætningen til Geogebra vises kun x-værdien).

$$f(x) := 2 \cdot x + 4$$

$$f := x \rightarrow 2\,x + 4$$

$$g(x) := 8 \cdot x + 2$$

$$g := x \rightarrow 8\,x + 2$$

$$solve(\,f(x) = g(x)\,)$$

$$\frac{1}{3}$$

Opgaver

Side. 44 Mat opgave 5-7

Funktioner 1

Sætning: Hvis der er givet 2 punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) som ligger på grafen for $f(x) = a \cdot x + b$, så kan tallet a bestemmes ud fra formlen.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bevis.

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$ (Punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) indsættes i forskriften).

$$y_2 = a \cdot x_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - (ax_1 + b)$$ (ligningerne trækkes fra hinanden).

Funktioner 1

Bevis fortsat.

$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$

$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$ (Udtrykket reduceres).

$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$ (a sættes udenfor parentes på v.s.)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (a isoleres).

Hermed er sætning bevist. ▫

Funktioner 1

Konstant b bestemmes ud fra formlen $b = y_1 - a \cdot x_1$

Eksempel: Bestem a og b for den funktion, som går gennem punkterne.
$A(2,4)$ og $B(4,8)$.

Vi indsætter i formlen for a: $a = \frac{8-4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2, \quad b = 4 - 2 \cdot 2 = 0$

Dvs. forskriften for linjen hvor A og B ligger på er $y = 2 \cdot x$

Funktioner 1

Eksempel fortsat.

Vi kan gøre prøve ved at indsætte punkterne i forskriften efter tur.

$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ og $f(4) = 2 \cdot 4 = 8$

Med andre ord, så ligger punktet A og B på linjen.

Opgaver

Opgave: 215, Mat1, side 38.

Opgave: 216, Mat1, side 38.

Opgave: 218, Mat1, side 39.

Opgave: 1103, Mat2 spg a-c, side 176.

Opgave: 1104-1105 (kun spg a i begge), Mat2 side 176.

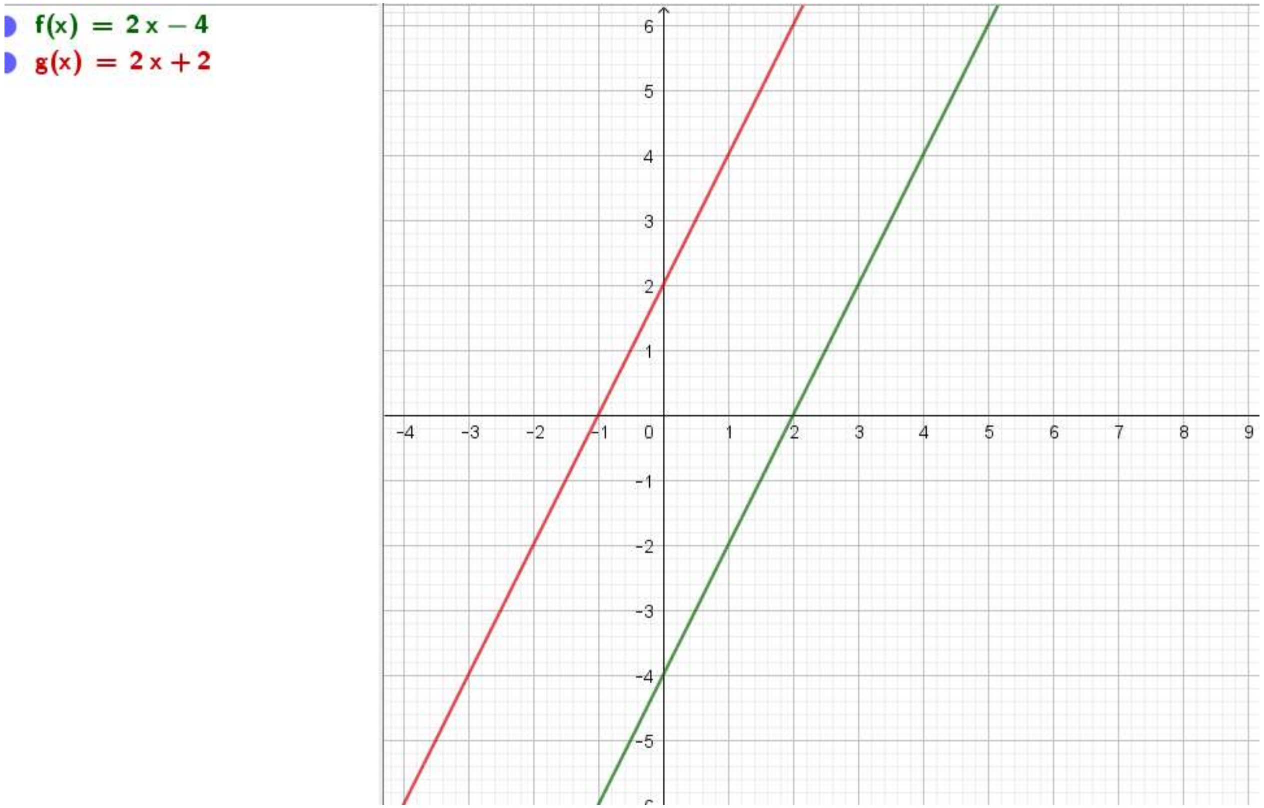
Funktioner 1

Definition: Lad linjen l have hældningstallet a_1 og lad linjen m have hældningstallet a_2. Hvis $a_1 = a_2$, så siges l og m at være parallelle.

Eksempel: $f_1(x) = 2 \cdot x + 2$ og $f_2(x) = 2 \cdot x - 4$

Da f_1 og f_2 har samme hældningstal, nemlig 2, så er linjerne parallelle.

Funktioner 1 (parallelle linjer)



Funktioner 1

Sætning: linjen l (med hældningstal a_1) og m (med hældningstal a_2) siges at stå vinkelret på hinanden (dvs. de danner en vinkel på 90 grader). Hvis så frem produktet af deres hældningstal giver minus 1.

Med andre ord: $a_1 \cdot a_2 = -1$ (Se lærebogen Mat2 s. 161).

Funktioner 1

Eksempel(vinkelrette linjer.).

Lad der være givet 2 linjer som nedenfor.

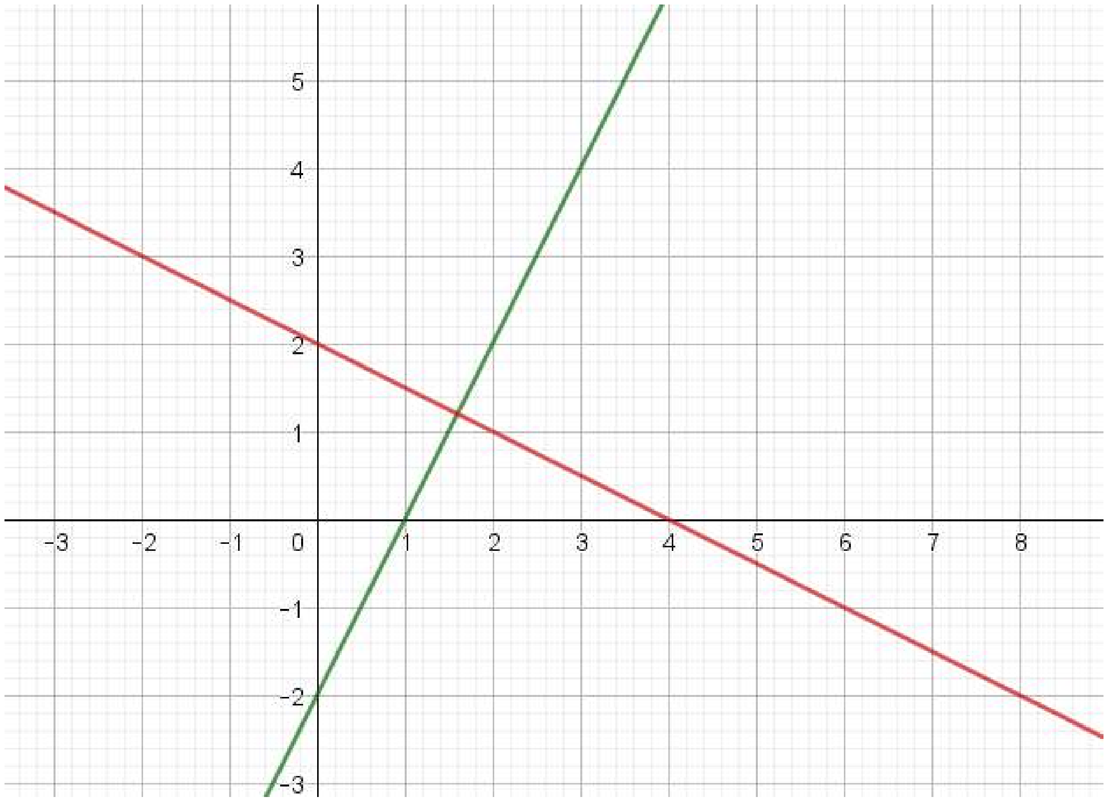
$$\text{l:}\quad y = 2 \cdot x - 2$$

$$\text{m:}\quad y = -\frac{1}{2} \cdot x - 2$$

Produktet af deres hældningstal $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$

Så anses de for værende vinkelrette på hinanden.

Funktioner 1 (vinkelrette linjer).



Opgaver

Opgave 1)

Undersøg og argumenter for at linjerne $y = \frac{1}{2} \cdot x + 4$ og $y = \frac{1}{2} \cdot x - 5$ er parallelle. (Tegn dem evt. i Maple eller Geogebra)

Opgave 2)

Undersøg og argumenter for at linjerne $y = 2 \cdot x + 4$ og $y = -\frac{1}{2} \cdot x - 5$ ikke er parallelle. (Tegn dem evt. i Maple eller Geogebra)

Opgave 1110, Mat 2, side 177

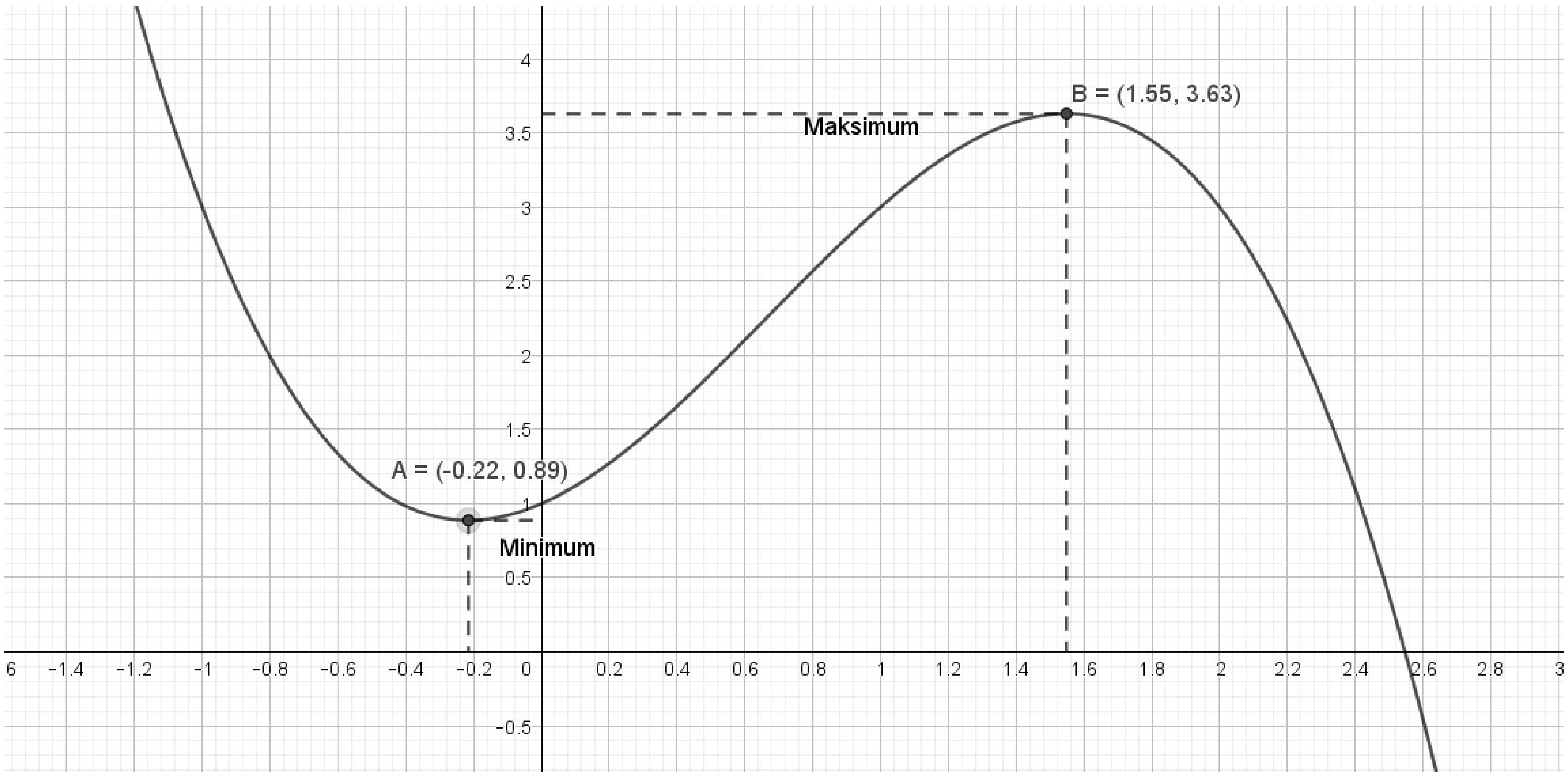
Funktioner 1

En funktion $f(x)$ med defintionsmængde $Dm(f)$ og værdimængden $Vm(f)$ er givet.

Den maksimale y-værdi, som en funktion opnår på et givet interval kaldes funktionens maksimum.

Den minimale y-værdi, som en funktion når på et given interval kaldes funktionens minimum.

Funktioner 1 (Eksempel på funktion)

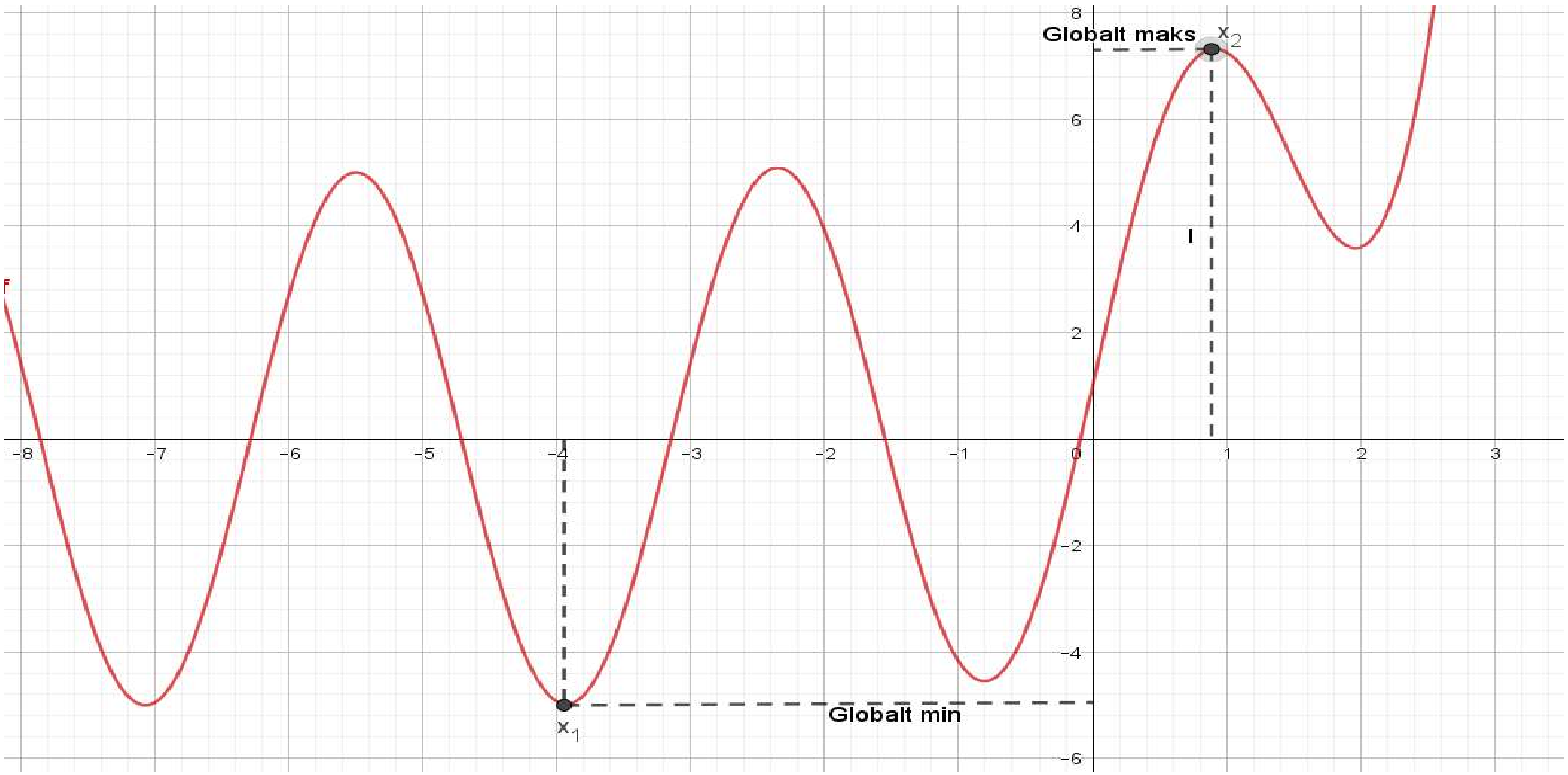


Funktioner 1

Definition af globalt maksimum og globalt minimum

- En funktion *f* siges at have *globalt maksimum* i et tal x_2, hvis $f(x_2)$ er større end alle andre funktionsværdier.
- Tilsvarende siges *f* at have *globalt minimum* i et tal x_1, hvis $f(x_1)$ er mindre end alle andre funktionsværdier.

Funktioner(Eks Global maks og min)

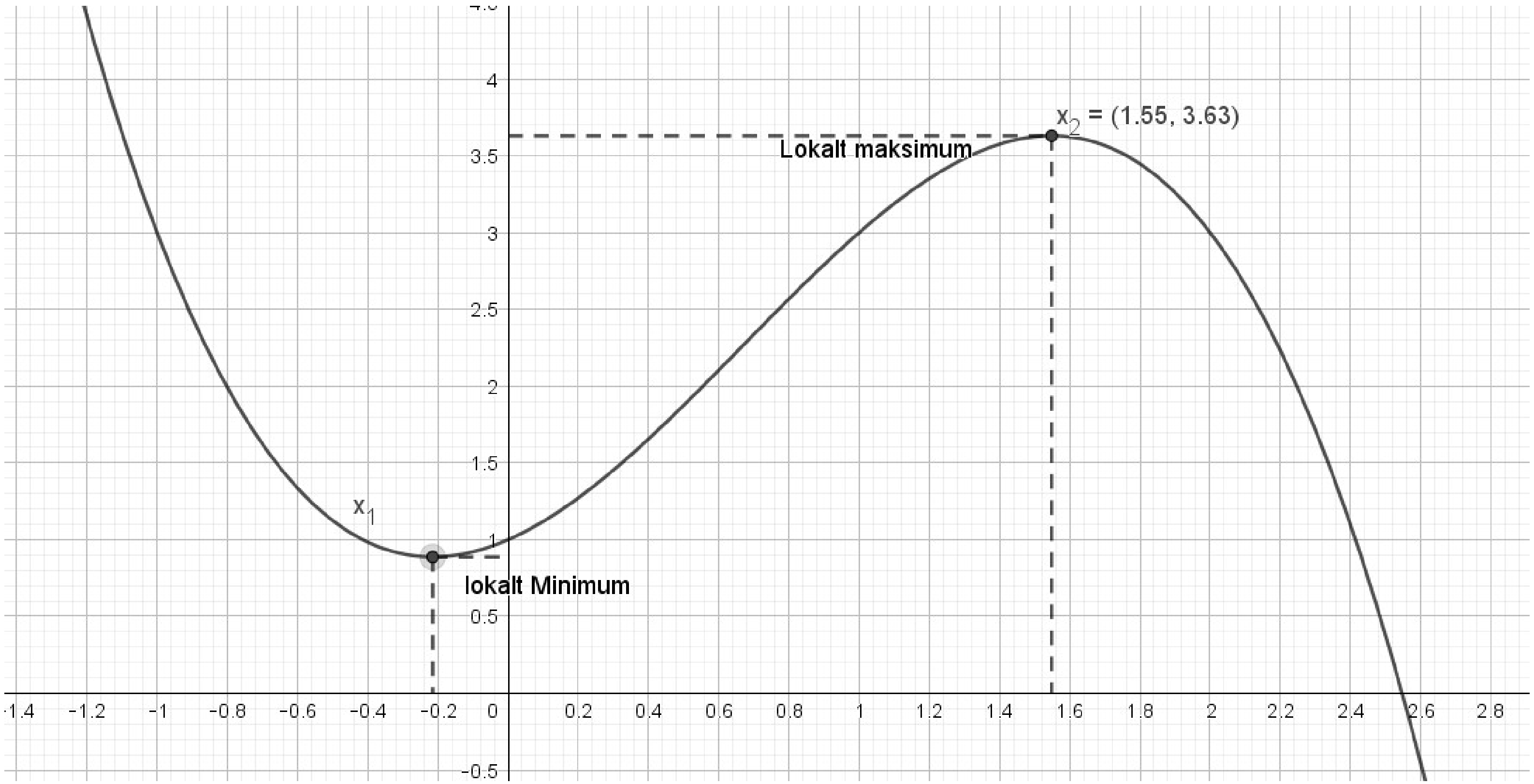


Funktioner 1.

Definition af lokalt maksimum og lokalt minimum

- En funktion f siges at have *lokalt maksimum* i et tal x_2, hvis $f(x_2)$ er den største funktionsværdi i et lille interval omkring x_2.
- På tilsvarende defineres et lokalt minimum.

Funktioner 1 (Eks lokal maks og min)



Funktioner 1 fortsat

Kommando til at finde maksimum i Maple.

Eksempel: Find maksimum for $f(x) = -x^3 - 2 \cdot x + 2$

maximize(-x^3-2*x+2, location, x = -1 .. 1)
2.088662108, {[{x = .8164965809}, 2.088662108]}

Maple returner maksimumsstedet x = 0.82 samt
maksimumsværdien til det sted y = 2.08.
(Minimum findes på samme måde blot med kommandoen minimize.)

Funktioner 1

Monotoniforhold.

Definition: En funktions monotoniforhold er en liste af intervaller, hvori funktionen er voksende eller aftagende.

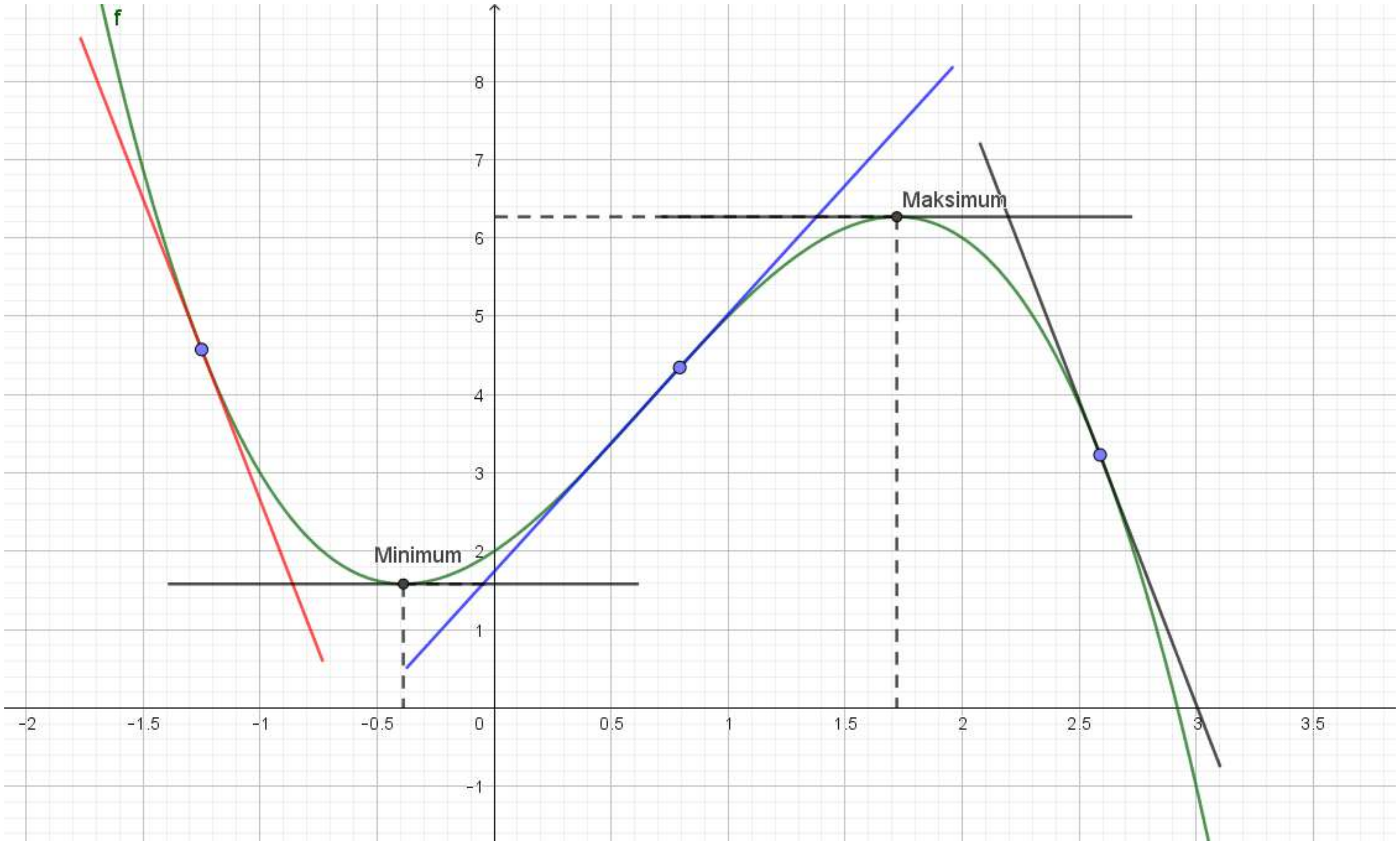
Funktioner.

Definition: En tangent er en ret linje, som skærer grafen for en funktion i netop et punkt.

Hvis hældningen for en tangent til en funktion f, er negativ indtil et maksimum eller minimumspunkt for f. Så siges funktionen at være aftagende i intervallet indtil. min eller makspunktet.

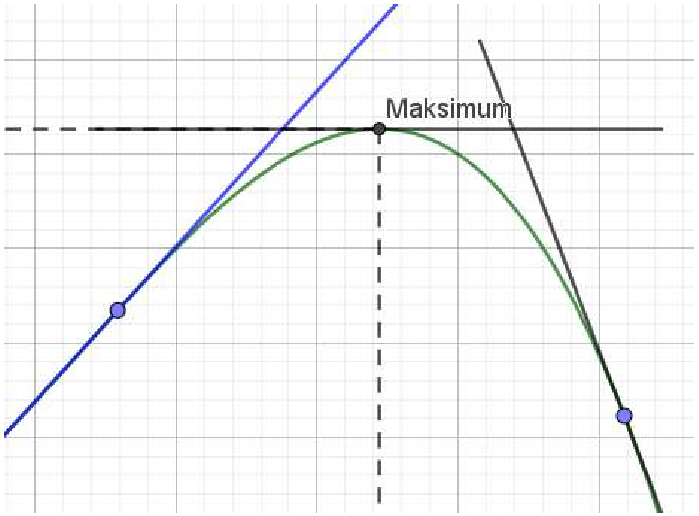
Hvis hældningen for en tangent til en funktion f er positiv indtil et maksimum eller minimumspunkt for f. Så siges funktionen at være voksende i intervallet indtil min eller makspunktet.

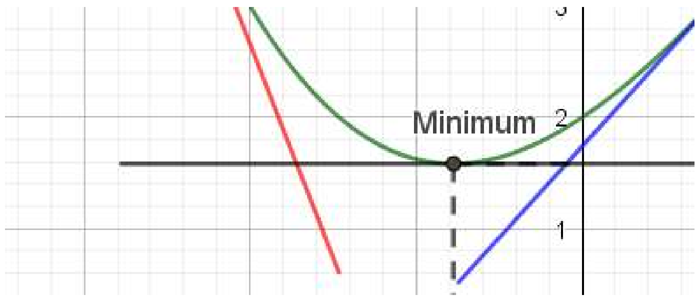
Funktioner 1. (Monotoni forhold).



Funktioner 1 (Ekstrema steder og tangent)

De steder hvor en funktion har en tangent med hældningen nul, er de steder hvor funktionen har maksimum eller minimum.





Funktioner 1.

Praktisk anvendelse af ekstrema.

Se side 194, Mat 1 bogen.

Opgaver

Kernestof Mat1 HF, Øvelse 19 + 20 side 195.