Undervisning 5

Eksponentielle funktioner

Eksponentiel funktioner

Vi så tidligere, at udvikling af en værdi K_0 i n terminer med fremskrivningsfaktoren (1+r). Dette kan udtrykkes ved hjælp af renteformlen:

$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$, hvor K_n er slutkapitalen efter n terminer.

Eksponentielle funktioner.

En sådan udvikling kan beskrives ved hjælp af en såkaldt eksponentiel funktion.

$$f(x) = b \cdot (1 + r)^x = b \cdot a^x$$

Hvor b er startværdien og a kaldes fremskrivningsfaktoren.

Eksponentielle funktioner

Om værdien b gælder følgende.

b-værdien er grafen for f's skæring med y-aksen, idet

$$f(0) = b \cdot a^0 = b$$

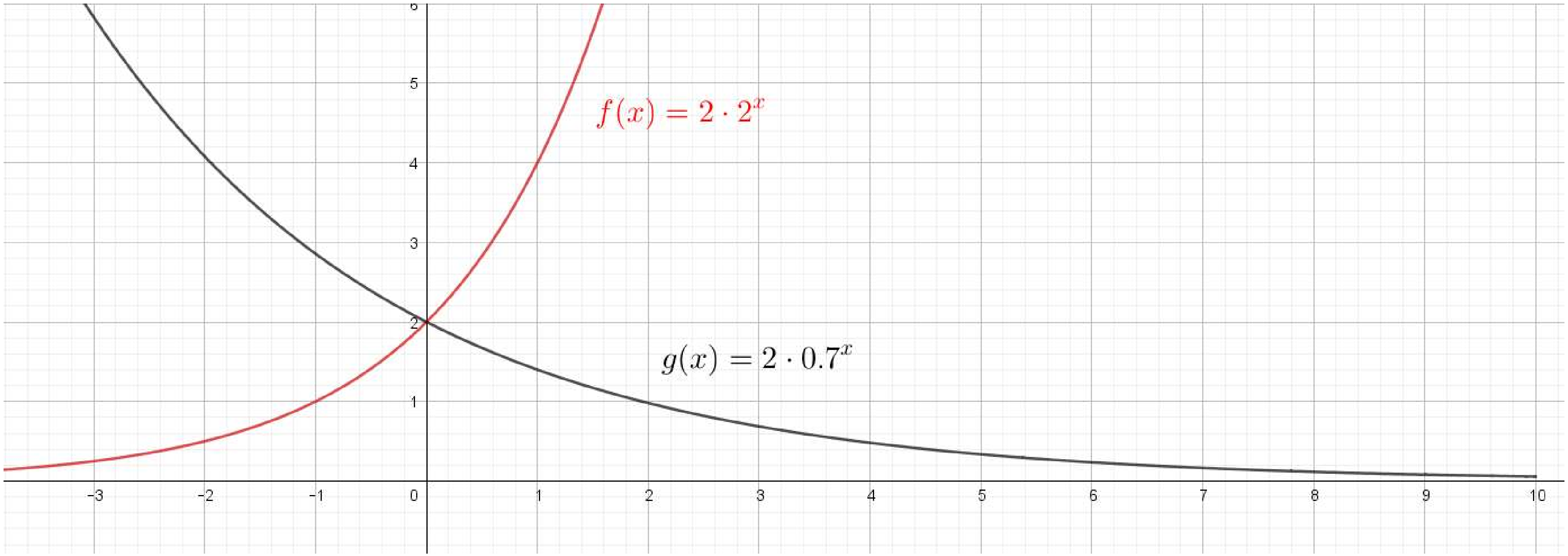
Eksponentielle funktioner.

Om værdien a gælder følgende.

- Hvis $0 < a < 1$, så er der tale om eksponentielt aftagende funktioner.
- Hvis $a > 1$, så er der tale om en eksponentielt voksende funktion.

Eksponentielle funktioner.

Grafen for 2 eksponentielle funktioner(voksende og aftagende).



Eksponentielle funktioner.

Definitionsmængden og værdimængde for eksponentielle funktioner.

Defintionsmængden: Dm er alle reelle tal.

Værdimængden : Vm er alle positive tal.

Eksponentielle funktioner.

Kobling med renteformlen.(Negativ udvikling).

Eksempel:

Antag antallet af borgere i Nørreulveby er 1250 personer i 1970, og at indbyggertallet falder med 5 % om året efter 1970.

Opstil en model, som beskriver udviklingen i byens befolkning efter 1970.

Eksponentielle funktioner.

Eksempel fortsat.

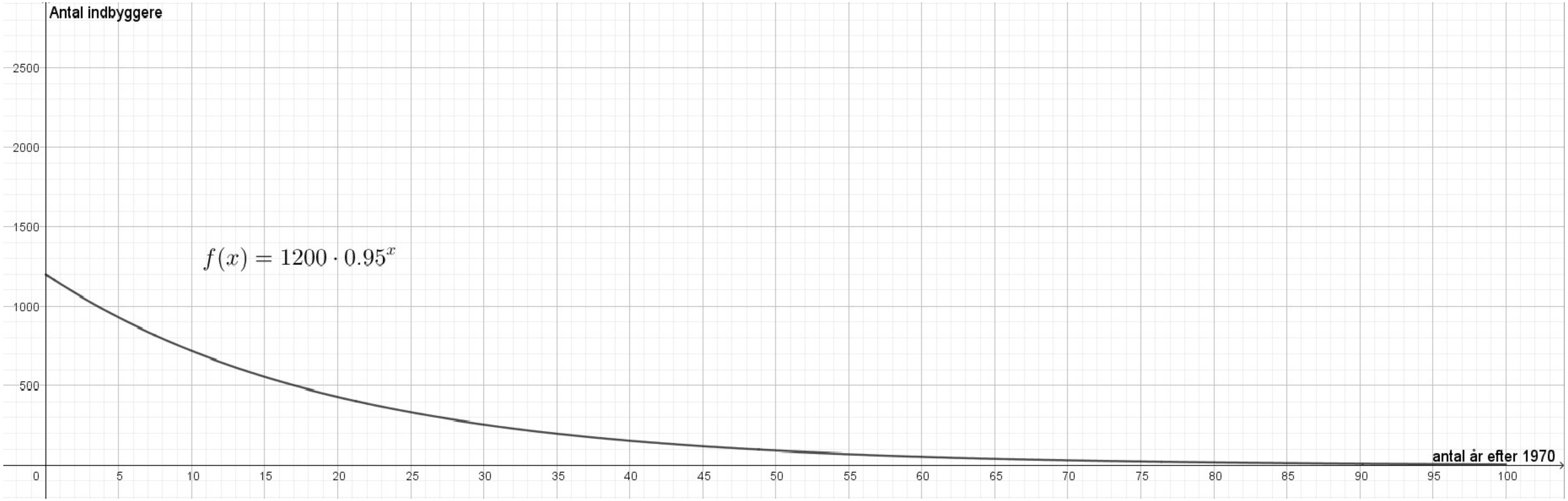
Vi indsætter i formlen fra slide 3, og opnår derefter.

$$f(x) = 1250 \cdot (1 - 0.05)^x = 1250 \cdot 0.95^x$$

Her er $b = 1250$ og $a = 0.95$

Eksponentielle funktioner

Udviklingen i antal borgere i Nørreulveby efter 1970.



Eksponentielle funktioner.

Eksempel fortsat.

Hvor man borgere var der i Nørreulveby i år 2000, hvis udviklingen holder?

År 2000 = 30 år efter 1970. Dette indsættes på x’s plads i funktionen.

$$f(30) = 1200 \cdot 0.95^{30} = 257.56.$$

Eksponentielle funktioner.

Dvs. i år 2000 er der cirka 256 indbyggere i byen, hvis udviklingen fastholdes.

Eksponentielle funktioner

Eksempel(Positiv udvikling).

Signe sætter 1000 kr i banken til 10 % i rente p.a. Opstil en model, som beskriver udviklingen i antal kroner på kontoen. Anvend passende variable.

$$b = 1000 \text{ og } \mathrm{a} = 1.10$$

Modellen er $f(x) = 1000 \cdot 1.10^{x}$,

hvor x er antal terminer og f(x) antal kroner til terminen x.

Eksponentielle funktioner.

Eksempel fortsat.

Hvor mange kroner havde Signe på kontoen efter 2 terminer?

Man indsætter 2 på x's plads,

$$f(2) = 1000 \cdot 1.10^2 = 1210$$

Dvs. Signe havde 1210 kroner på kontoen efter 2 terminer.

Opgaver

Opgave 701, side 150 i Mat1-bogen.

Opgave 702, side 150 i Mat1-bogen.

Opgave 707, side 150 i Mat1-bogen.

Eksponentielle funktioner

Men hvornår er Signes opsparing så fordoblet? For at kunne sige noget mere om det introduceres begrebet logaritmer.

Eksponentielle funktioner.

Lidt om logaritmer og eksponentielle funktioner.

Vi fra når vi arbejder med potenser, at

$$10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000$$

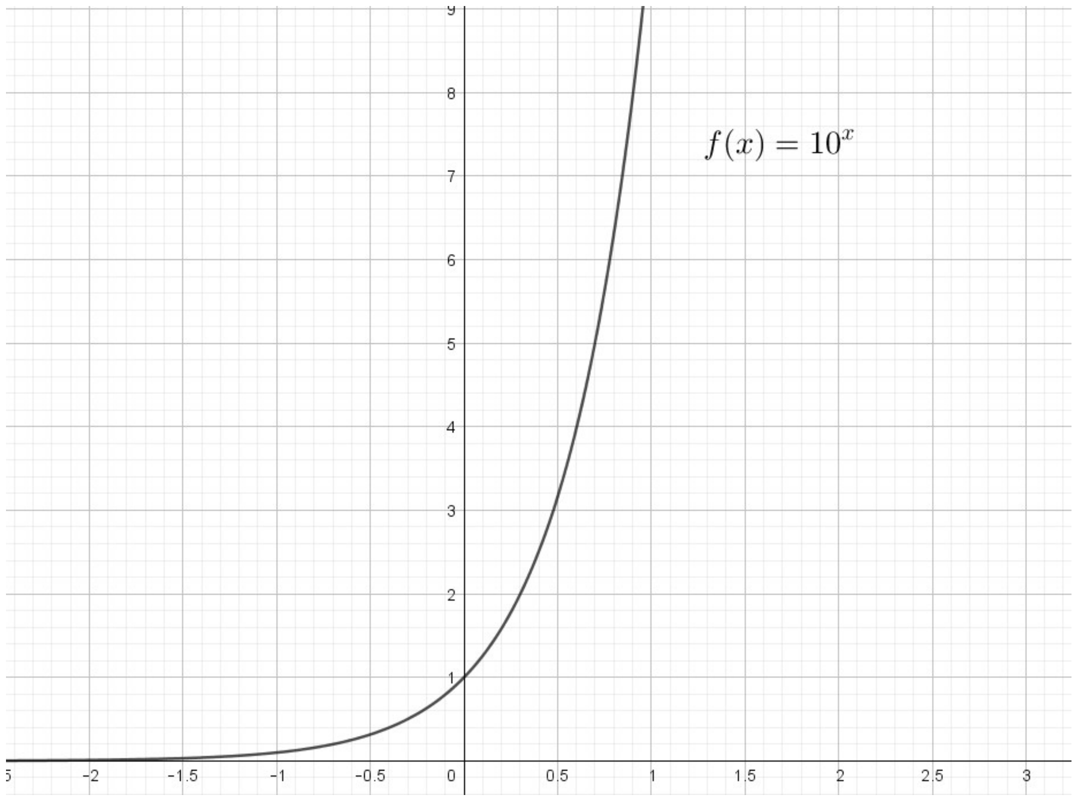
Forestil jer nu dette som en funktion $f(x) = 10^x$, som også er en eksponential funktion.

Eksponentielle funktioner

Grafen for $f(x) = 10^x$

$Dm(f) = \mathbb{R}$

$Vm(f) = \mathbb{R}_+$



Eksponentielle funktioner.

Antag du nu gerne vil løse ligningen

$$10^x = 100$$

Men du har ingen direkte metoder til at løse denne ligning med mindre du gætter.

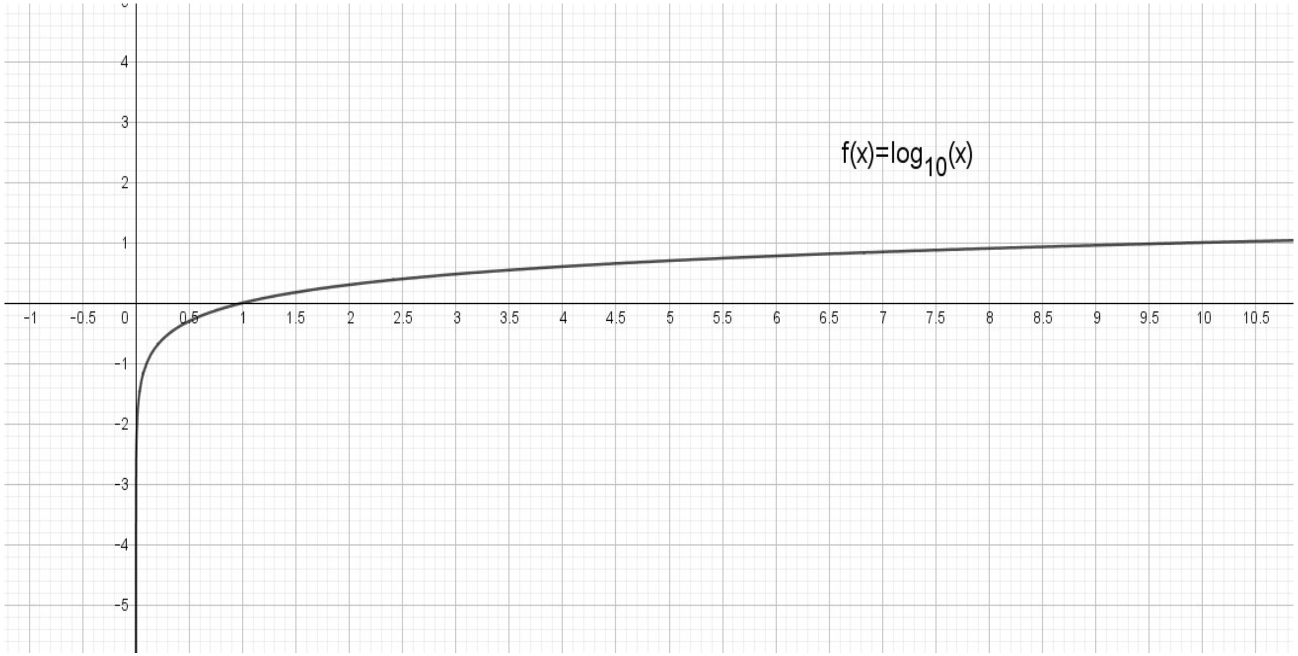
For kunne løse ligningen, vælger vi at indfører funktion $\log_{10}(x)$ til dette formål.

Eksponentielle funktioner.

Grafen for $f(x) = \log_{10}(x)$

$Dm(f) = [0; \mathbb{R}[$

$Vm(f) =]-\infty, \infty[$



Eksponentielle funktioner.

For funktionen $f(x) = 10^x$ og $\mathrm{g(x)} = \log_{10}(x)$ er "hinandens modsatte.

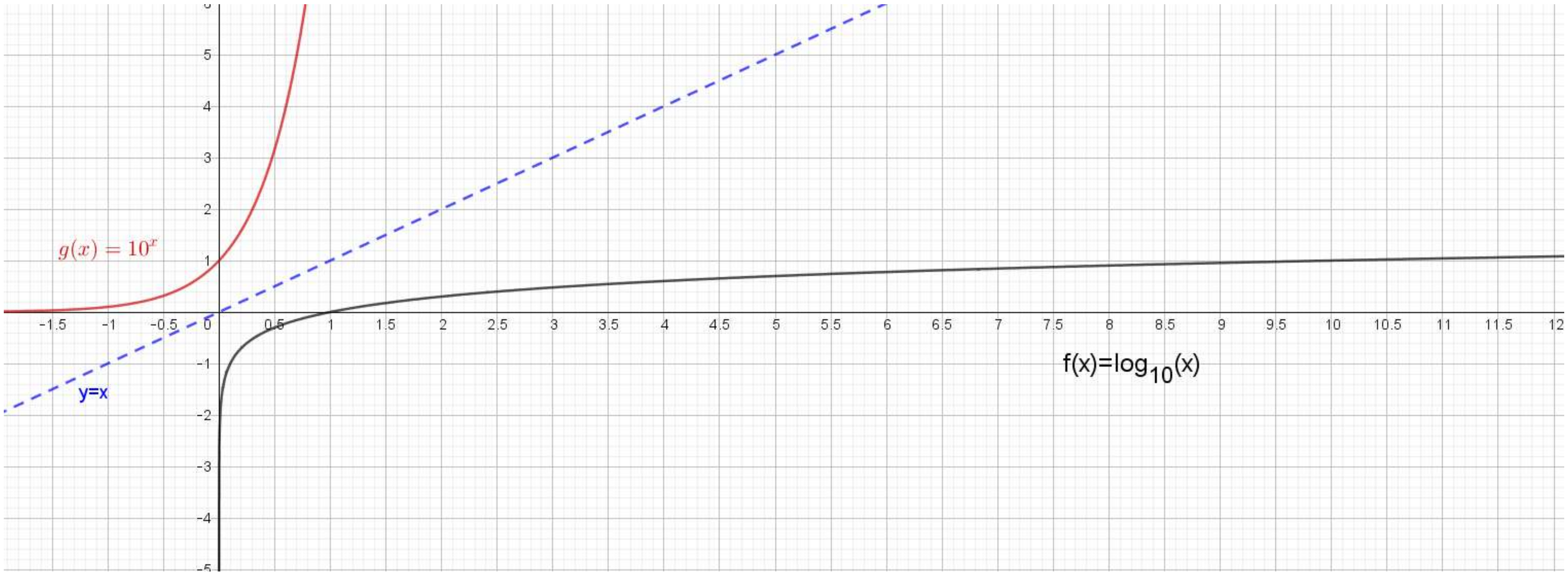
Mere formelt siges at $f(x)$ og $g(x)$ er inverse funktioner. Dvs. de over følgende: $f\big(g(x)\big) = x$ og $g\big(f(x)\big) = x$.

For $f(x) = 10^x$ og $g(x) = \log_{10}(x)$ betyder det:

$$f\big(g(x)\big) = 10^{\log_{10}(x)} = x \text{ og } g\big(f(x)\big) = \log_{10}(10^x) = x$$

Eksponentielle funktioner.

$f(x) = 10^x$ og $g(x) = \log_{10}(x)$ hinandens invers, grafisk.



Eksponentielle funktioner.

Derfor hvis man nu ønsker at løse ligningen fra før, kan vi nu anvende logaritme-funktionen til hjælp:

$$
\begin{aligned}
10^x &= 100 \\
\log_{10}(10^x) &= \log_{10}(100) \\
x &= \log_{10}(10^2)
\end{aligned}
$$

Dvs. at løsningen til ligningen er : $x = 2$

Eksponentielle funktioner.

Til logaritme funktionen høre en serie af regneregler.

1) $\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$

2) $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$

3) $\log_{10}(a^x) = x \cdot \log_{10}(a)$

(Reglerne bevises senere).

Eksponentielle funktioner.

Logaritme og Eksponentielle funktioner.

Hvad er sammenhængen mellem logaritmer og eksponentielle funktioner?

Sætning: En eksponentiel funktion tegnet på et såkaldt enkelt-logaritmisk papir bliver til en ret linje.

Eksponentielle funktioner

Bevis

hvis du anvender $\log_{10}(x)$ på begge sider af lig med af udtrykket for den eksponentielle funktion, $\mathrm{y} = b \cdot a^x$.

$$\log_{10}(y) = \log_{10}(b \cdot a^x)$$

$$\log_{10}(y) = \log_{10}(b) + \log_{10}(a^x) \text{ (Regneregel 1)}$$

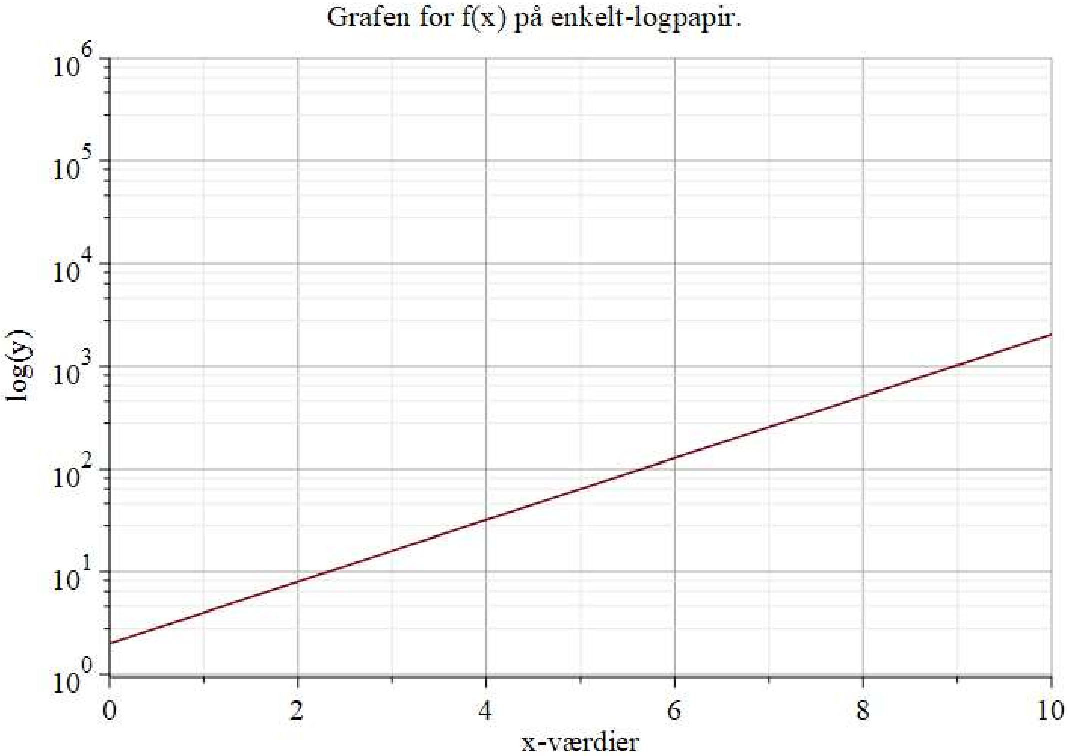
$$\log_{10}(y) = \log_{10}(b) + x \cdot \log_{10}(a) \text{ (Regneregel 3)} \ \square$$

Eksponentielle funktioner.

Eksempel på grafen for den eksponentielle funktion $f(x) = 2 \cdot 2^x$ tegnet på enkelt-logaritmisk papir.

Bemærk, at skala på y-aksen er inddelt efter logaritme-skalalen.

$$1,10,100,1000,10000$$



Eksponentielle funktioner

Vi ser på en eksponentiel funktion af typen $y = b \cdot a^x$, som er voksenden. Dvs, a>1.

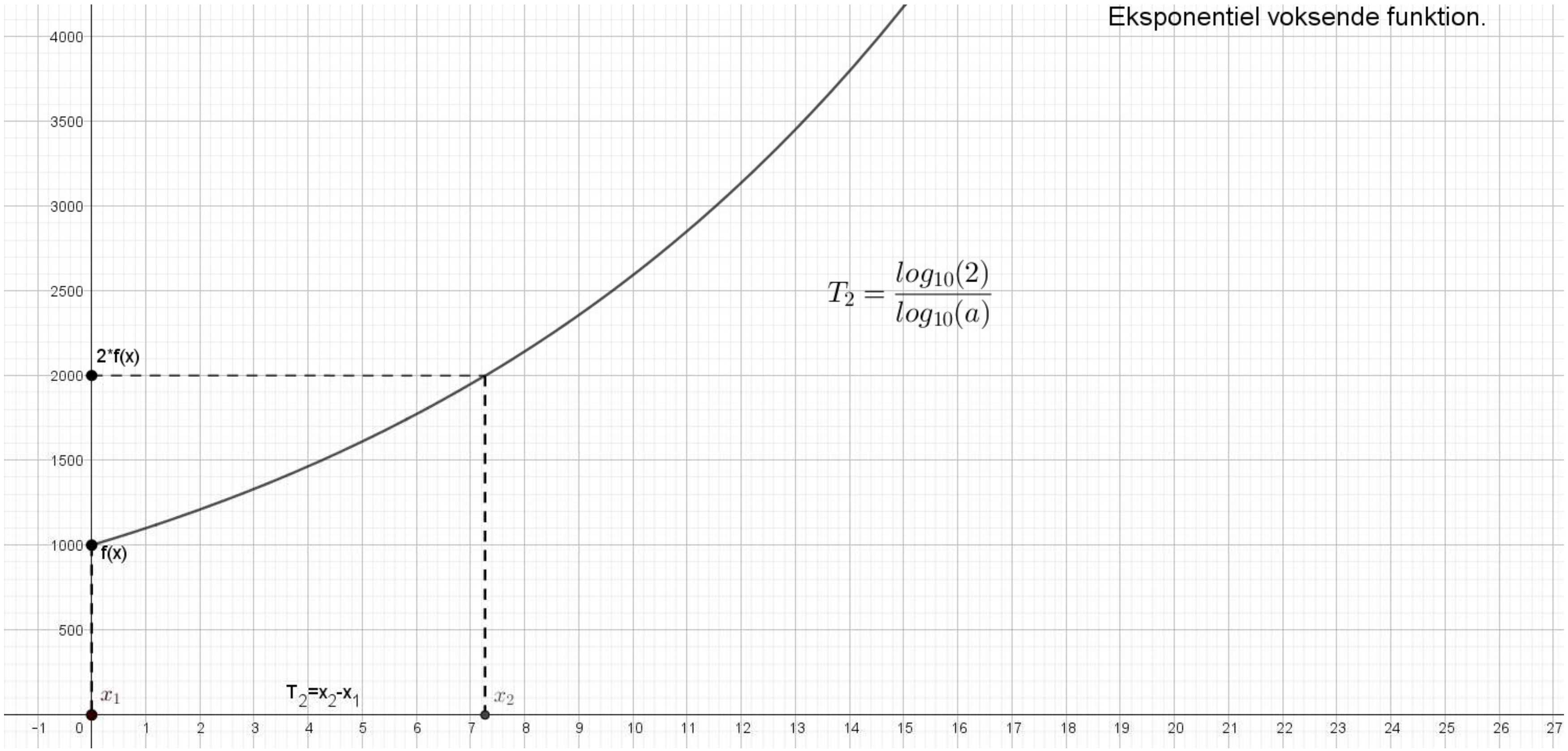
Fordoblingstid:

Det stykke vi skal gå ud af x-aksen før y bliver fordoblet kaldes

<u>Fordoblingstiden.</u>

Eksponentielle funktioner.

Grafen for en eksponentielt voksende funktion.



Eksponentielle funktioner.

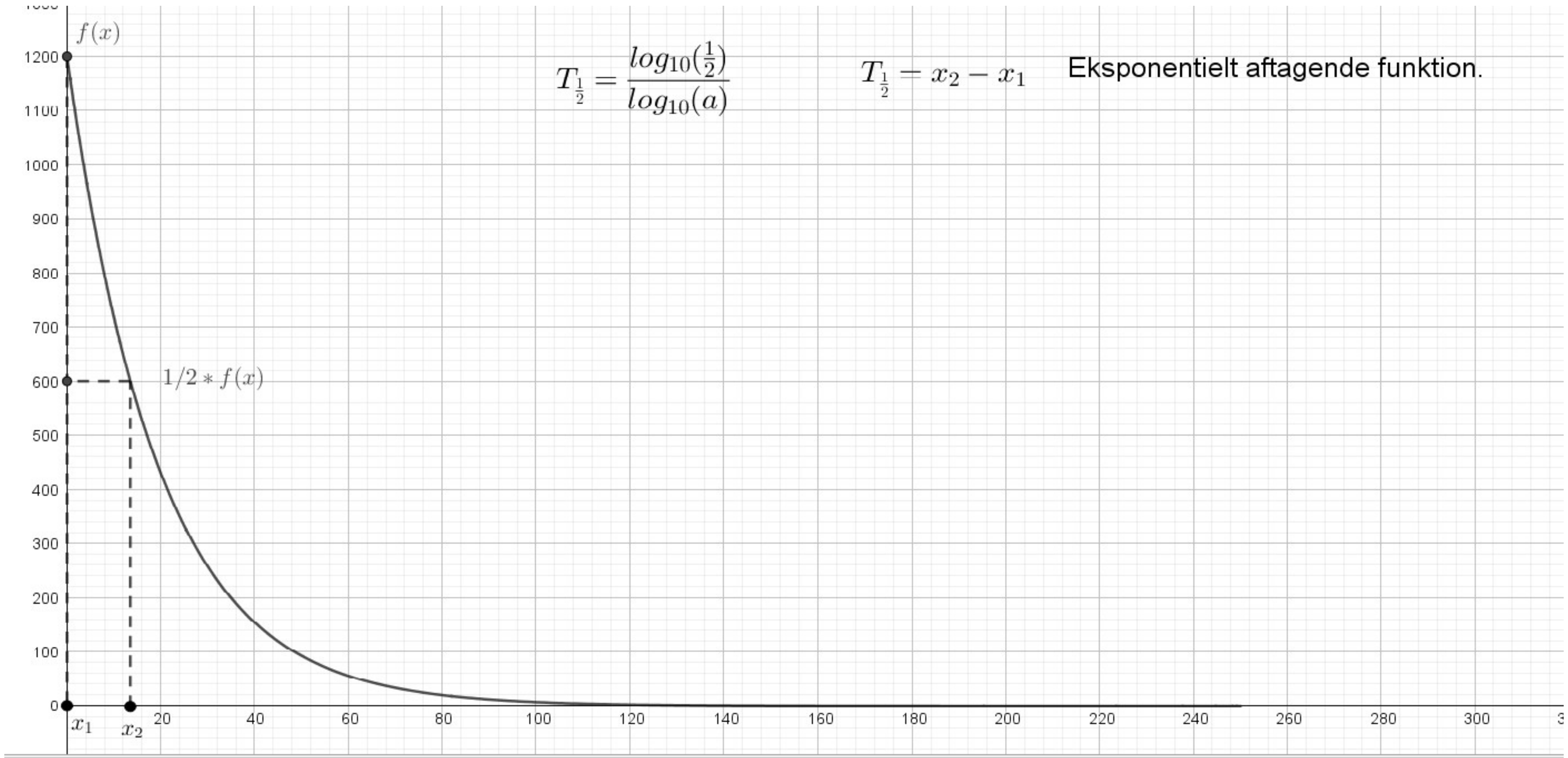
Vi ser på en eksponentiel funktion af typen $y = b \cdot a^x$, som er aftagende. Dvs, 0<a<1.

Halveringstid:

Det stykke vi skal gå ud af x-aksen før y bliver halveret kaldes halveringsstiden.

Eksponentielle funktioner.

Grafen for en eksponentielt aftagende funktion.



Eksponentielle funktioner.

Formlerne til at bestemme fordoblings og halveringtid.

Fordoblingstidsformlen: $T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)}$

Halveringstidsformlen: $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log_{10}(\frac{1}{2})}{\log_{10}(a)}$

Eksponentielle funktioner.

Eksempel:

Tidligere, så vi en eksponentiel funktion som beskriver befolkningsudvikling i Nørreulveby fra 1970 til nu.

$$f(x) = 1200 \cdot 0.95^x$$

Der er tale om en eksponentielt aftagende funktion, idet 0<a<1.

Eksponentielle funktioner.

Eksempel fortsat.

Vi indsætter derfor i formlen for halveringstid.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log_{10}(\frac{1}{2})}{\log\_10(0.95)} = 13.51340734$$

Dvs. at der går cirka 13 år efter 1970, før befolkningen i Nørreulveby er halveret (iht. Modellen).

Eksponentielle funktioner.

Eksempel.

Vi så tidligere på at Signe havde indsat 1000 kroner i banken til 10 % i rente p.a.

Dette kunne beskrives ud fra funktion $f(x) = 1000 \cdot 1.10^x$

Eksponentielle funktioner

Eksempel fortsat.

Idet det er tale om en eksponentielt voksende funktion, idet a > 1, så indsættes i formlen for fordoblingstiden.

$$T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(1.10)} = 7.272540898$$

Dvs. der går 7.27 år efter startåret før Signes kapital er fordoblet.

Eksponentielle Funktioner.

Bevis fordoblingskonstanten.

$$**2 \cdot f(x) = b \cdot a^{x_2} \text{ og } *f(x) = b \cdot a^{x_1}$$

(Vi indsætter punkterne $(x_1, f(x))$ og $\left(x_2, 2 \cdot f(x)\right)$ i $y = b \cdot a^x$)

$$\frac{2 \cdot f(x)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

(Vi deler ** med *.)

Eksponentielle funktioner.

Bevis fortsat.

$$2 = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

(Udtrykket reduceres.)

$$2 = a^{x_2 - x_1}$$

(Potensregel 19, s.7 i formelsamlingen anvendes)

Eksponentielle funktioner.

Bevis forsat.

Herefter anvendes logaritme regneregel 3 på begge sider af lig med.

$$\log_{10}(2) = \log_{10}(a^{x_2 - x_1}) = (x_2 - x_1) \cdot \log_{10}(a)$$

Efterfølgende opnås $(x_2 - x_1) = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)}$

Eksponentielle funktioner.

Bevis fortsat.

Idet $T_2 = x_2 - x_1$, så kan vi nu skrive resultatet fra før som :

$T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)}$ (Hermed er sætningen bevist). ▫

Opgaver.

Øvelse: Prøv med inspiration fra beviset for fordoblingstiden, at bevise formlen for halveringstiden. (frivillig).

Opgave 726-728, side 154 i Mat1-bogen.

Øvelse 16, side 108 i Mat2-bogen.

Øvelse 20, side 109 i Mat2-bogen.

Eksponentielle funktioner.

<u>At bestemme a og b i en eksponentiel funktion ud fra 2 punkter.</u>

Hvis vi har givet en $y = b \cdot a^x$, så hvis 2 punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) kendes, så kan a og b bestemmes ud fra formlerne:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \text{ og } b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Eksponentielle funktioner.

Eksempel

Lad der være givet punkterne $(2,4)$ og $(4,16)$ og hvis de kan beskrives ud fra en eksponentiel funktion $y = b \cdot a^x$

Der indsættes i formlerne fra forrige slide.

$\sqrt[4-2]{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$ $b = \frac{4}{2^2} = 1$ Dvs. $f(x) = 1 \cdot 2^x = 2^x$

Eksponentielle funktioner.

Eksempel fortsat.

Det giver forskriften $\mathrm{f(x)} = 2^x$

Vi testen at punkterne ligger på grafen.

$$f(2) = 2^2 \text{ og } f(4) = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Med andre ord, så ligger punkterne på grafen for f.

Eksponentielle funktioner.

Bevis for formlen for a og b i en eksponentiel funktion.

**$y_2 = b \cdot a^{x_2}$ (indsætter punktet (x_2, y_2) i $y = b \cdot a^x$)

*$y_1 = b \cdot a^{x_1}$ (indsætter punktet (x_1, y_1) i $y = b \cdot a^x$)

Vi dividerer dernæst ** med *: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$

Eksponentielle funktioner.

Bevis fortsat.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$ (Udtrykket reduceres).

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

(Regneregel 19, s. 7 formelsamling anvendes).

Eksponentielle funktioner.

Bevis fortsat.

Tilslut tages den $x_2 - x_1$ - rod på begge sider af ligmed.

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Hermed er sætningen bevist. ▫

Eksponentielle funktioner.

Bevis for b.

$y_1 = b \cdot a^{x_1}$ (indsætter punktet (x_1, y_1) i $y = b \cdot a^x$)

$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$ (b isoleres i ovenstående).

Hermed er formlen for b bevist. ▫

Eksponentielle funktioner.

Andre varianter af eksponentiel funktioner.

$y = e^x$ (hvor e kaldes Eulers tal).

$y = b \cdot e^{k \cdot x}$ k = ln(a)

NB! ln(a) kaldes den naturlige logaritme til a og behandles i et senere sæt af slides.

Opgaver

Opgave 712, side 151 i Mat1-bogen.

Øvelse 18, side 109 i Mat2-bogen.