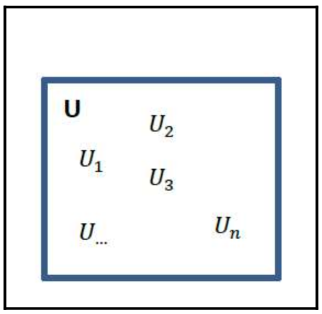
Sandsynlighedsregning.

Inden for matematikken arbejder man med at kunne forudsige ting og situationen. Dette kaldes eksperimenter og er en del af emnet sandsynlighedsregning.

Eksempelvis kan man regne på hvor stor er chancen for at vinde i spil, hvis spillet kræver at opnår en sekser i et terningekast.

At slå en 6'er med ærlig 6-sidet tegning kaldes et **udfald.** Men en 6-sidet terning kan opnå har de mulige udfald

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, hvor U kaldes **Udfaldsrummet.**



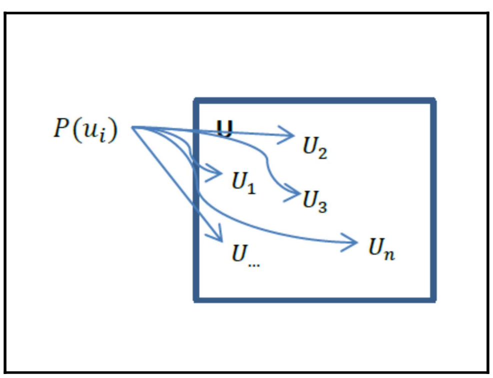
Udfaldrum U

Til udfaldsrummet U høre en såkaldt sandsynlighedsfunktion P(u), hvor P står for propability (sandsynlighed på engelsk). Sandsynlighedsfunktionen bruges til at beregne sandsynlighed for et udfald forekommer.

Definition: Sandsynlighedsfunktion.

Sandsynlighedsfunktion P er en funktion, hvor $P(u_i)$ er defineret på intervallet [0,1].

Samt at det er gældende, at $P(u_i)$ hvor $i \in [1, n]$



Ydermere, at $P(U) = P(u_1) + P(u_2) + ... + P(u_n) = 1$
hvor $U = u_1, u_2, ..., u_n$ de forskellige udfald i udfaldsrummet U.

$P(u_n)$ skal læses som sandsynligheden for at udfaldet u_n opnås. Sandsynligheder måles i procent.

For at kunne sige noget mere generelt om sandsynlighed, så samles udfaldsrum og sandsynlighesfunktion i begrebet, Sandsynlighedsfelt.

Et sandsynlighedsfelt består af et udfaldsrum U og en sandsynlighedsfunktion $P(U)$.

Eksempel:

Der kastes med en ærlig 6-sidet terning. I skemaet nedenfor vises sandsynlighederne for de enkelte udfald i udfaldsrummet *U*.

Udfald	1	2	3	4	5	6
P(u)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Dette kaldes et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*, idet sandsynlighed for hvert af udfaldene forekommer er lige store.

Et *ikke-symmetrisk sandsynlighedsfelt* er et sandsynlighedsfelt, hvor sandsynligheden for et bestemt udfald forekommer ikke er lige store.

Eksempel:

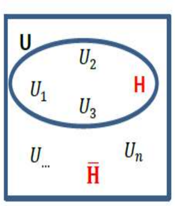
En skål indeholde 5 stykker slik, 4 røde stykker slik og et blåt stykke slik.

Dette sandsynlighedsfelt er ikke-symmetrisk, idet sandsynligheder ikke er lige store.

Sandsynligheden for at udtage et blot stykke slik $P(rød) = \dfrac{4}{5}$ og sandsynligheden for blot stykke slik $P(blåt) = \dfrac{1}{5}$.

Hændelse.
Sandsynlighed for et udfald af et eksperiment forekommer kaldes en hændelse.

Definition: En hændelse benævnt H er en delmængde af udfaldrummet U.



hændelse

Sandsynligheden for en bestemt hændelse $H = \{u_1, u_2, u_3\}$ forekomme beregnes

$P(H) = P(u_1) + P(u_2) + P(u_3)$.

Det skrives også $P(H) = \dfrac{\text{antal gundstige}}{\text{antal mulige}}$.

Den modsatte hændelse, dvs. sandsynligheden for hændelse H ikke forekommer, kaldes komplementar-hændelse, benævnt $\bar{H}$.

Eksempel:

Sandsynligheden for at slå en 6'er med en ærlig terning er $P(6) = \dfrac{1}{6}$. Sandsynligheden for ikke at slå en 6'er er

$P(\text{ ikke } 6) = 1 - P(6) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Kombinatorik

Kombinatorik er en matematisk deciplin, hvor der man studerer, hvor mange måder et sæt af elementer fra forskellige grupper kan sammensættes. Eksempelvis, hvis der er 22 kursister på et hold på Aalborg City Gymnasium, hvor mange forskellige måder kan disse sammensættes?

$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1124000727777607680000$

Men dette er en meget træls måde at skulle regne antal mulige elever ud.

Vi prøver derfor med et mindre kompliceret eksempel.

Eksperiment.

Du udvælger 5 personer. På hvor mange måde kan disse sammensættes?

Først har du 5 personer, så har 4 personer, så 3 personer, 2 personer, og til sidst 1 person.

Antal måder, hvormed de kan sammensættes er $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Men da dette er en besværlig skrivemåde, så skrives dette istedet $5\,! = 120$

Denne særlige skrivemåde kaldes fakultet.

Når man arbejder med kombinatorik, så er det interesseret se på hvor mange muligheder, som forskellige hændelser kan forekomme. Dette kaldes både - og samt enten - eller princippet.

Både-og - Enten- eller principper

Definition: Enten-eller.

Enten-eller princippet (plus)
Hvis en hændelse kan indtræffe på m måder og en anden hændelse kan indtræffe på n måder, så er der der $m + n$ måder én af disse to hændelser kan indtræffe på.

Eks. I en klasse med 11 drenge og 17 piger, skal der vælges

a) En klasserepræsentant,
Der skal vælges **enten** en dreng **eller** en pige, altså 1 ud af de i alt 11+17= 28 elever

Det andet princip er både og, som defineres nedenfor.

Definition: Både og

Både-og princippet (gange)
Hvis en hændelse kan indtræffe på m måder og en anden hændelse kan indtræffe på n måder, så er der $m \cdot n$ måder disse to hændelser kan indtræffe sammen på.

Et "ugens dukse par", hvor der **både** skal være en dreng **og** en pige
Hvis vi først vælger en dreng er der 11 muligheder. Hver af disse kan kobles sammen med en tilfældig af de 17 piger. For hver dreng er der altså 17 pige-kombinationer, så i alt er der $11 \cdot 17$ mulige par-kombinationer.

Eksempel(Både og)

Du slår 2 gange med én 6-sidet terning, hvad er sandsynligheden for at få både en 6'er og 1'er?

Sandsynligheden for at få en 6'er $P(6) = \frac{1}{6}$ og sandsynligheden for at få en 1'er er $P(1) = \frac{1}{6}$
Sandsynligheden for at få både en 6'er og en 1'er er derfor beregnet ved.

$$\mathrm{P}(1 \text{ og } 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Eksempel (Enten eller)

Du slår 2 gange med én 6-sidet terning, hvad er sandsynligheden for at få både en 6'er eller 1'er?

Sandsynligheden for at slår enten 6'er eller 1'er.

$$\mathrm{P}(1 \text{ eller } 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

<u>Et mere kompleks eksempel.(For de øvede)</u>

Et mere komplekst eksempel på enten el er, at der slås med 2-terninger. Hvad er sandsynligheden for summen er øjene er 4?

Løsning: Hvis man lægger antal mulige udfald sammen, så er
$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), ..., (6,5), (6,6)\} = 36$

Dette kan også opstilles som skemaet.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Antal muligheder kan også opnås ved at bruge både og.
Der er 6 muligheder med terning 1 og 6 muligheder med terning 2, så der er samlet $6 \cdot 6 = 36$ muligheder.

Hændelsen $H = (\{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\})$

Herefter kan sandsynligheden beregnes for summen af øjnene er 4, som
$P(4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Kombination.

Indenfor statistikken er det relevant at se på hvor mange måder man kan udtage r elementer af en mængde på n, hvor rækkenfølgen er er vigtig eller ej. Dette kaldes hhv. permutation og kombinatorik.

> Definition: Permutation
>
> Vi udtager r elementer af en mængde på n, men rækkefølgen er afgørende.
>
> Antal måder hvorpå dette kan gøres er $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Eksempel.

Vi skal udtage 2 bolde af en kasse med 20 bolde, heraf er 12 røde og 8 blå. Der skal udtages først en rød og herefter en blå bold.

Løsning.

$$P(20, 2) = \frac{20!}{(20-2)!} = 380$$

Dvs. der udtages en rød bold og herefter en blå bold på 380 måder.

Definition: Kombinatorik

Vi udtager r elementer af en mængde på n. Rækkefølgen er ikke afgørende.

Antal måder bestemmer. $K(n, r) = \dfrac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$

Eksempel.

Vi udtager 2 bolde af en kasse med 20 bolde. Rækkefølgende er ikke afgørende.

$$K(20, 2) = \frac{20!}{2! \cdot (20 - 2)!} = 190$$

Det vil sige der udtages 2 bolde af kasse på 190 måder.