

Trigonometri

Undervisning del 1

Trigonometri

Fakta om trekanter (C-niveau)

En trekant er en trigonometrisk konstruktion, som består af 3 sider og 3 vinkler.

- Vinkler beregnes med stort bogstav (A, B, C,) og kan f.eks. Også være betegnet $\angle BAC$ og $\angle CBA$, hvor der menes hhv. vinkel A og vinkel B.
- Sider betegnes med lille bogstav (a,b,c,) og kan være beskrevet f.eks. $|AB|$. Hvor sidstnævnt læses som som afstanden fra vinkel A til B.
- Vinkler måles i grader (Summen af vinklerne i en trekant er altid 180 grader).

Trigonometri

Ensvinklede trekanter.

2 trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ siges at være ensvinklede. Hvis det gælder følgende.

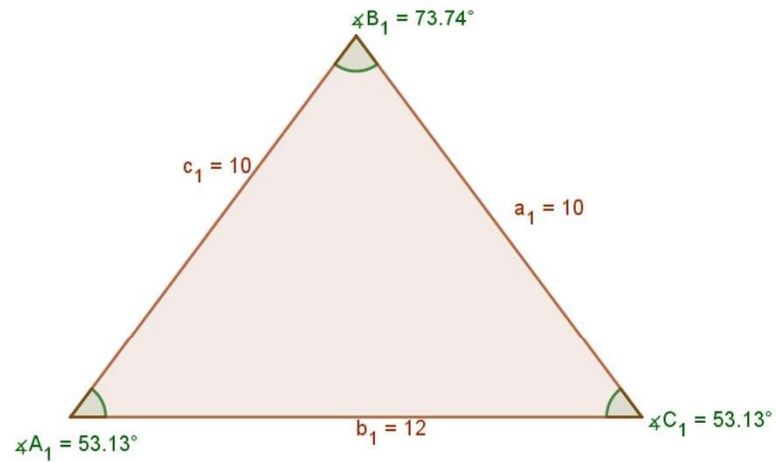
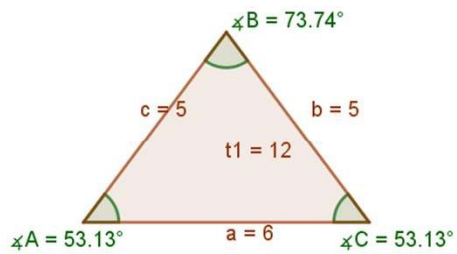
$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$

Trigonometri

Skalafaktor

Formel : $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$

Eksempel



$$k = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Dvs. skalafaktoren er $k = 2$

$$a_1 = 5 \cdot k = 5 \cdot 2 = 10$$

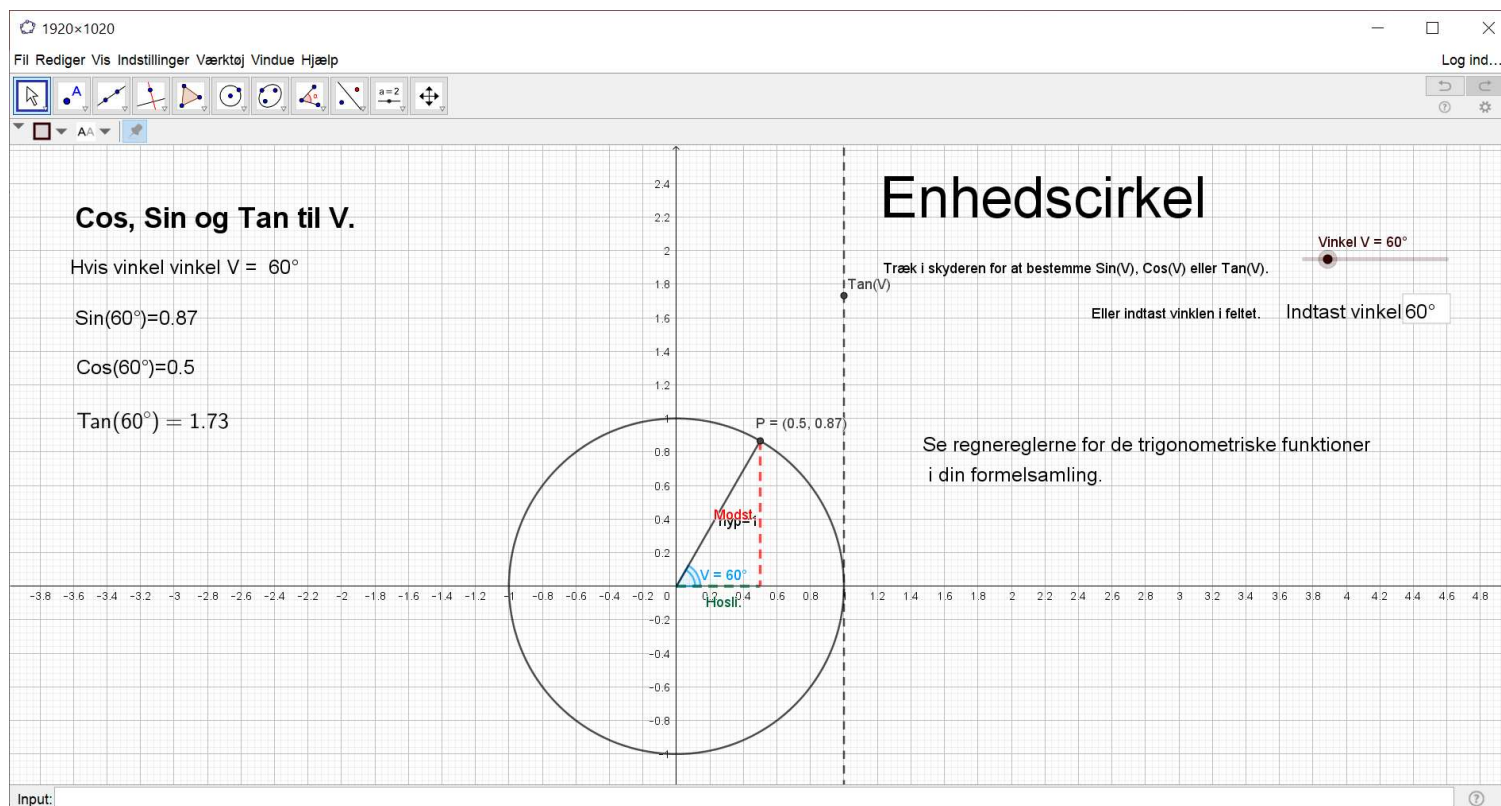
$$b = \frac{b_1}{k} = 5$$

Trigonometri

Størrelsen på vinkler bestemmes ud fra de trigonometriske grundfunktioner, Sinus, Cosinus og Tangens. Forkortet hhv (Sin, Cos og Tan).

Størrelsen på vinklerne er defineret ud fra **Enhedscirklen.**

Trigonometri(Enheds-cirkel)



Trigonometri

Enhedscirklen fortolkes således at Cosinus til en given vinkel aflæses ud fra x-aksen og Sinus til en given vinkel aflæses ud fra y-aksen. Tangens aflæses langs streges langs y-aksen.

Vigtig (Cosinus og Sinus)

Sinus og Cosinus er begge defineret for perioden 2π og har værdimængden $[-1,1]$.

Tangens.

y – værdien er defineret for perioden π og har værdien \mathbb{R} .

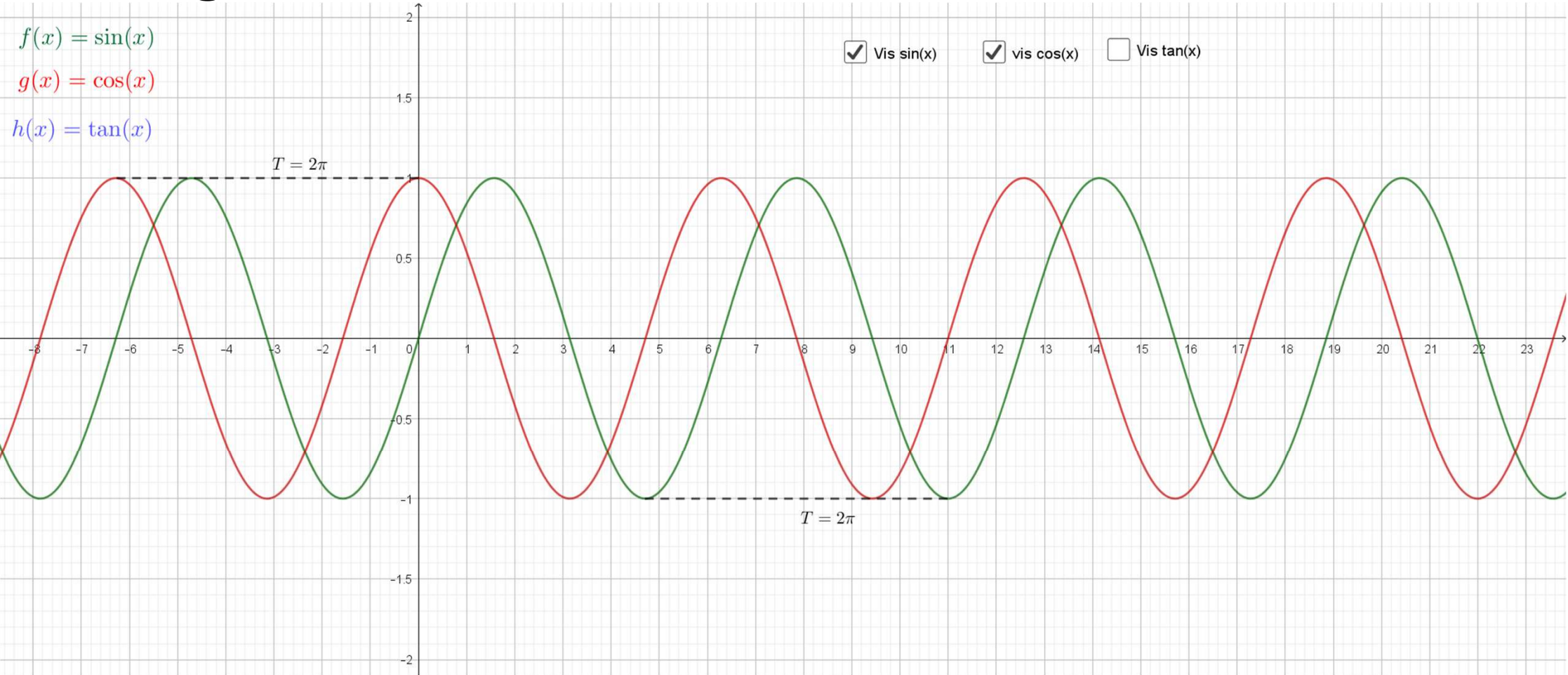
Trigonometri

$f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \cos(x)$

$h(x) = \tan(x)$

- Vis sin(x)
- vis cos(x)
- Vis tan(x)



Trigonometri

Fakta om den periodiske funktioner.

Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$ og $f_2(x) = \cos(x)$ er periodisk. Dvs. det altid tager samme tid at nå fra bølge bund til bølge top. Denne periode betegnes T har værdien 2π . Man siger funktionen gentager sig når x vokser med 2π .

Trigonometri

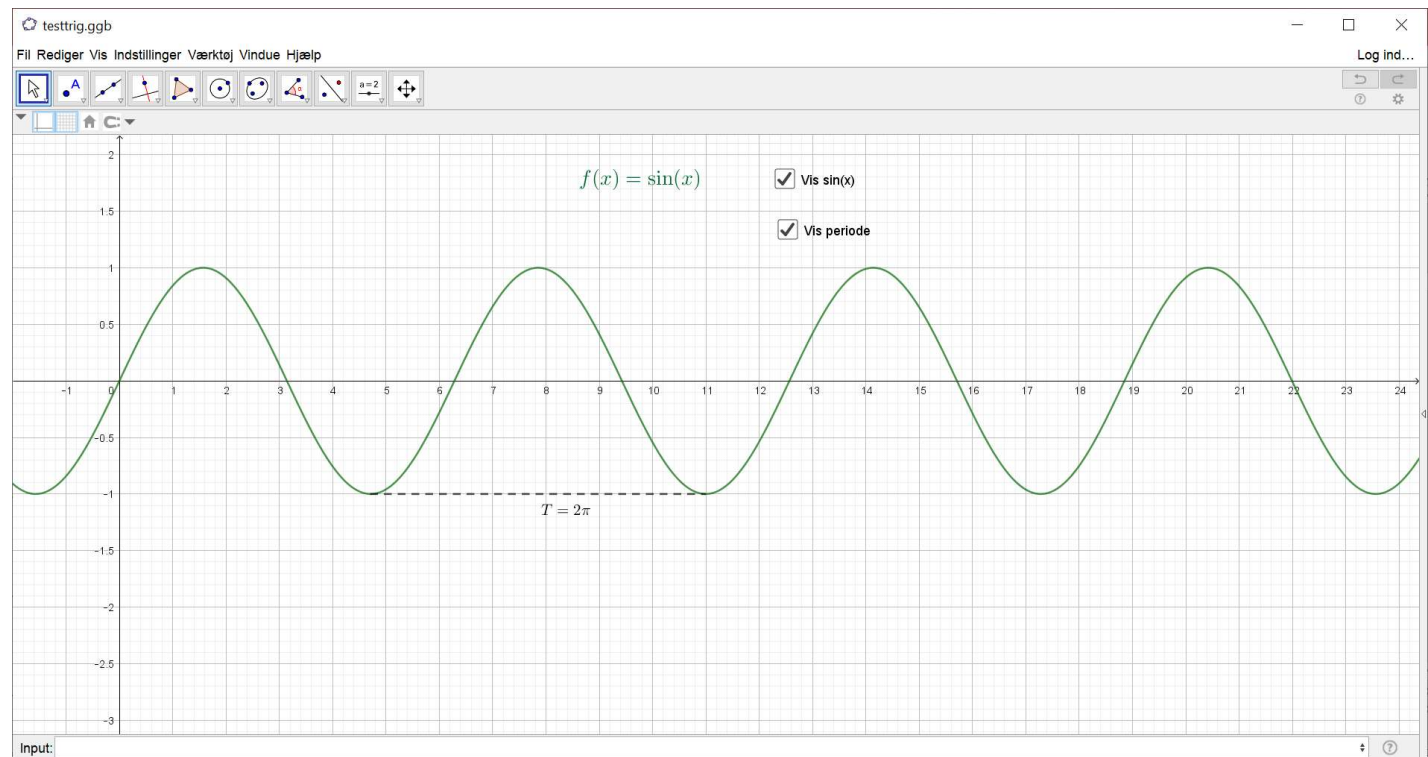
Perioden udtrykkes også som vist på tegningen.

$$T = 2\pi$$

$$\sin(x + n \cdot 2 \cdot \pi) = \sin(x)$$

Hvor n = antal gange vi bevæger os rundt i enhedscirklen.

$\cos(x)$ defineres tilsvarende.



Trigonometri

Anvendelse af den periodiske sinus funktion.

Vi anvender den periodiske sinus-funktion på funktioner af typen:

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \phi) + k$$

Dette kaldes funktion for en harmonisk svingning.

Trigonometri

Konstanterne harmonisk svingning.

A kaldes amplituden og har formel $A = \frac{\textit{maksimum} - \textit{minimum}}{2}$

ω kaldes vinkelfrekvensen.

ϕ kaldes faseforskydning.

k kaldes forskydningskonstanten. $k = \frac{\textit{maksimum} + \textit{minimum}}{2}$

Trigonometri

Anvendelse af harmoniske svingninger.

Lav beregninger på solskinstimer i en by.

Måling af bølgehøjde ved badestrande mm.

(Men mere om den periodiske funktion lidt senere) 😊

Trigonometri

Retvinklede trekanter.

Beregning af vinkler og længden af sider i retvinklede trekanter.

Vi kender fra C-niveau, at hvis man skal beregne sider i en trekant med en ret vinkel (Dvs. trekanten indeholder en vinkel på 90°). Der anvender vi Pythagoras-sætning.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hvor siderne a og b kaldes kateter og c benævnes hypotenusen.

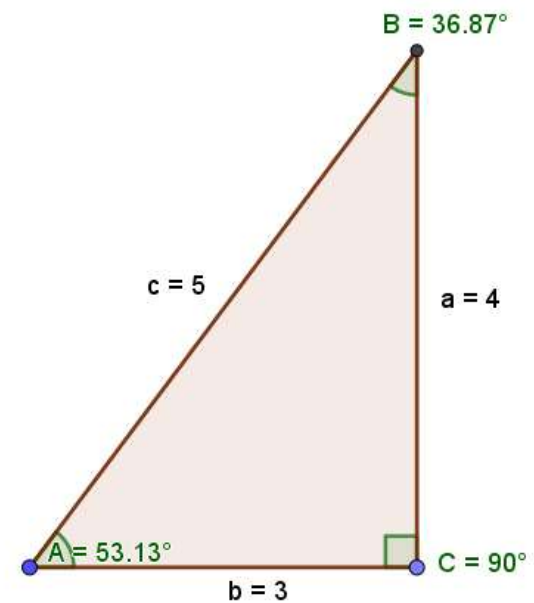
Trigonometri

Eksempel på en grundlæggende retvinklet trekant.

Bemærk at Pythagoras overholds

$$3^2 + 4^2 = c^2 = 25$$

$$\text{Hvor } c = \sqrt{25} = 5$$



Trigonometri

Beregning af vinkler og sider (retvinklet trekant).

Det kendes fra C-niveau at man beregne størrelsen af vinklerne i trekant, hvis 2 sider kendes.

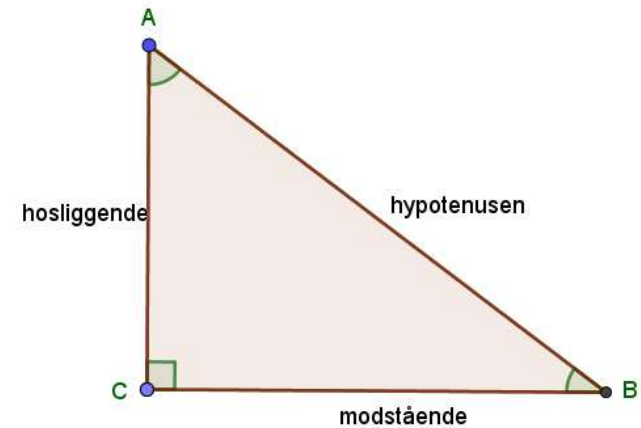
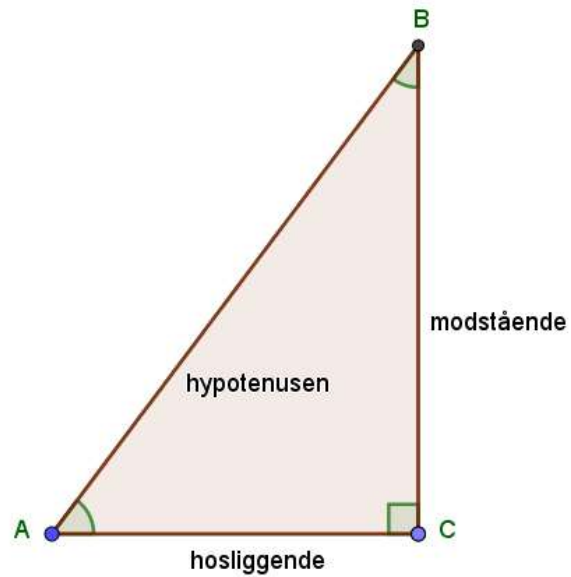
$$\sin(V) = \frac{\textit{modstående katete}}{\textit{hypotenusen}}$$

$$\textit{Cos}(V) = \frac{\textit{hosliggende katete}}{\textit{hypotenusen}}$$

$$\textit{Tan}(V) = \frac{\textit{hosliggende katete}}{\textit{modstående katete}}$$

Trigonometri

Husk, at reglerne fra forrige side gælder uanset hvordan den retvinklede trekant vender.



Trigonometri

Eksempel

Hvis $a = 3$ og $c = 5$ og vinkel $C = 90^\circ$. Bestem vinkel A og B.

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 53.13^\circ, \angle A = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53.13^\circ$$

$$\text{Vinkel B : } \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 53.13^\circ - 90^\circ = 36.87^\circ$$

$$\angle A = \text{Tan}(A) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 53.13^\circ$$

Trigonometri

Løsning vha. Maple.

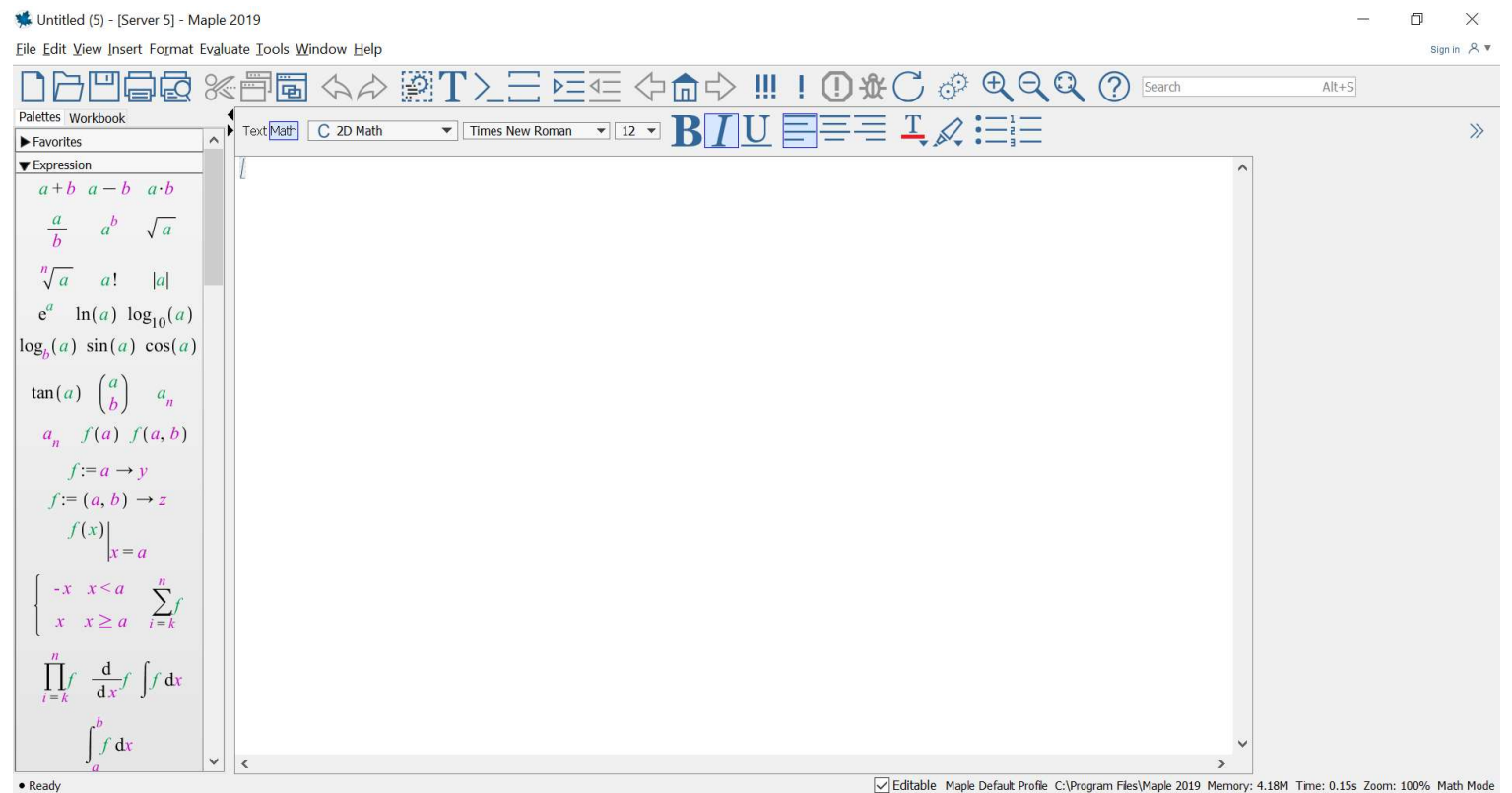
I åbner programmet Maple 2019 ved at dobbeltklikke på ikonet på jeres skrivebord(pc) .



På Mac vil det være at finde på statuslinje eller via funktionen Find (afhængig af IOS version).

Trignometri

Når Maple 2019 er startet op, så ser brugerfladen sådan ud.



Trigonometri

with(Gym)

[*ChiKvadratGOFtest, ChiKvadratUtest, Cos, ExpReg, Fcdf, Fpdf, Gini, KPplot, KvadReg, LPplot, LinReg, LogistReg, MultiLinReg, NormReg, PolyReg, PowReg, PropReg, QQplot, Sin, TVM, Tan, afdragAmort, afrund, amort, antalobs, antalstabel, arcCos, arcSin, arcTan, arealP, arealT, art, balanceAmort, bidrag, bincdf, binomialTest, binpdf, bokspot, cart2pol, chi2GOFtest, chi2Kritiskværdi, chi2Sim, chi2Teststørrelse, chi2Utest, chicdf, chipdf, det, dotP, enhedsvektor, ev, fintervalsolve, forventet, fraktil, frekvens, frekvensTabel, gennemsnit, gradient, grupperData, hat, hyppighed, hældningsfelt, intervalPlot, intervalsolve, invCos, invF, invSin, invTan, invbin, invchi, invnorm, invt, irr, konfidensInterval, kumuleretFrekvens, kvartiler, len, linjeelementer, median, middel, niveaukurver, normalcdf, normalpdf, npv, nulpunkter, omskrivKP, pindediagramBIN, plotHistogram, plotLorenzdiagram, plotPindediagram, plotResidualer, plotSumkurve, plotTrappekurve, pol2cart, polygonOmråde, proj, punktPlot, reelSolve, renteAmort, residualQQplot, residualer, residualspredning, skraver, spredning, standardafvigelse, stikprøvespredning, sumkurve, tInterval, tTest, tabelsum, tangentplan, tcdf, testLin, tpdf, trappekurve, trappekurveBIN, trekantsolve, typeinterval, typetal, varians, vektorPlot, vinkel, visMatrix, vsolve, zInterval, zIntervalAndel, zTest]*

with(Gym) :

Trigonometri

Vi definer sidelængderne ved hjælp af :=

$$a := 3 : c := 5 :$$

Herefter kan vi anvende Sinus eller Cosinus til at bestemme størrelsen på vinklerne A og B.

$$\sin(vA) = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{solve for } vA} [[vA = 36.86989765]] \xrightarrow{\text{select entry 1}} [vA = 36.86989765] \xrightarrow{\text{select entry 1}} vA = 36.86989765 \xrightarrow{\text{assign}}$$

Dvs. vinkel A er 36.87 grader.

Trigonometri

For at anvende Cosinus til at bestemme vinkel A igen, så anvendes Pythagoras til at bestemme siden b.

$$c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b = -4], [b = 4]] \xrightarrow{\text{select entry 2}} [b = 4] \xrightarrow{\text{select entry 1}} b = 4 \xrightarrow{\text{assign}}$$

Herved gemmes værdien for b i b. Du kan også bruge := til at gemme værdien i b.

Nu bestemmes størrelsen på vinkel A.

$$\cos(vA) = \frac{b}{c} \xrightarrow{\text{solve for vA}} [[vA = 36.86989765]]$$

Dvs. vinkel A er 36.87 grader.

Vinkel B kan bestemmes vha. 180 graders reglen $vB = 180 - vA - 90 = vB = 53.13010235$

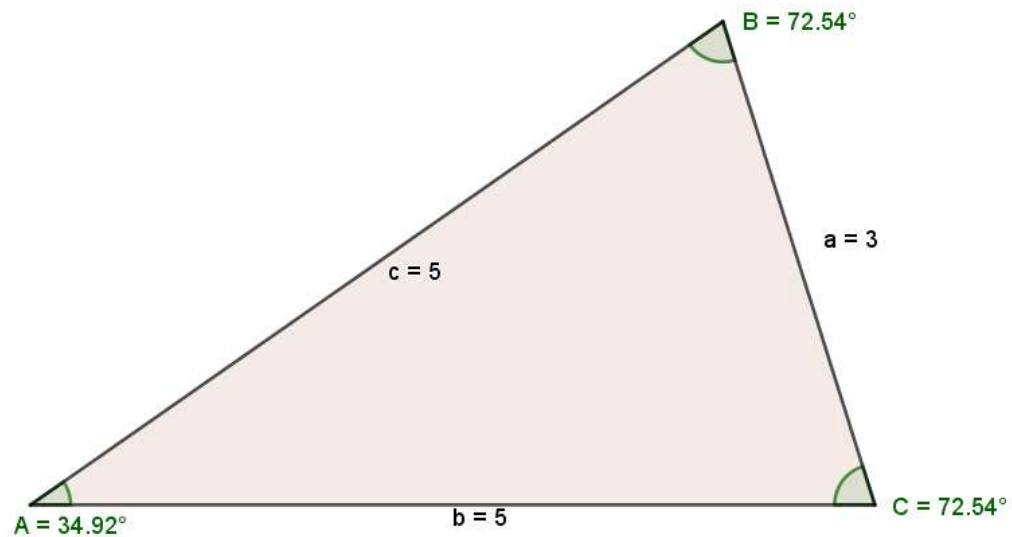
Eller via Cosinus $\cos(vB) = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{solve for vB}} [[vB = 53.13010235]]$

Trigonometri

Vilkårlige trekanter.

En ikke-retvinklet trekant er en trekant, som ikke indeholder en vinkel på 90° .

Eksempel på en ikke-retvinklet trekant.



Trigonometri

At bestemme sider og vinkler i ikke-retvinklede trekanter.

Sinus-relationen : $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ (Til at bestemme sider).

Sinus-relationen : $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$ (Til at bestemme sider).

Trigonometri

At bestemme sider og vinkler i ikke-retvinklede trekanter.

Cosinus-relation : $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos}(C)$ (Bestemme sider)

Cosinus-relationen: $\text{Cos}(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$ (Bestemme vinkel)

Trigonometri

Eksempel

For den vilkårlige trekant ABC hvor $a = 3$, $b = c = 5$. Bestem vinklerne A,B,C.

Vi anvender Cosinusrelationen til at bestemme siden vinkel C.

$$\cos(C) = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{10}, \angle C = \cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) = 72.54^\circ$$

Trigonometri

Eksempel fortsat

Ved at anvende sinus-relationen fås:

$$\frac{5}{\sin(72.54)} = \frac{3}{\sin(A)}, \sin(A) = \frac{3}{\left(\frac{5}{\sin(72.54)}\right)} = 0.5723559902$$

$$\angle A = \sin^{-1}(0.5723559902) = 34.92^\circ$$

Trigonometri

Eksempel fortsat

Slutteligt kan vi bestemme vinkel B ved 180 graders reglen.

$$\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 72.54^\circ - 34.92^\circ = 72.54^\circ$$

Trigonometri

with(Gym) :

$a := 3 : b := 5 : c := 5 :$

Vi anvender cosinus-relationen til at bestemme vinkel A.

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{Cos}(vA) \xrightarrow{\text{solve for } vA} [[vA = 34.91520625]] \xrightarrow{\text{select entry 1}} [vA = 34.91520625] \xrightarrow{\text{select entry 1}} \\ vA = 34.91520625 \xrightarrow{\text{assign}} \end{array}$$

Dvs. vinkel A er 34.92 grader.

Trigonometri

Vi anvender Sinus-rekationen til at bestemme vinkel B.

$$\frac{\sin(\nu A)}{a} = \frac{\sin(\nu B)}{b} \xrightarrow[\text{assign}]{\text{solve for } \nu B} [[\nu B = 72.54239699]] \xrightarrow{\text{select entry 1}} [\nu B = 72.54239699] \xrightarrow{\text{select entry 1}} \nu B = 72.54239699$$

Dvs. vinkel B er lig 72.54 grader.

Til sidst bestemmes vinkel C vha. 180 graders reglen.

$$\nu C = 180 - \nu A - \nu B = \nu C = 72.54239681$$

Dvs. vinkel C er lig 72.54 grader.

Trigonometri.

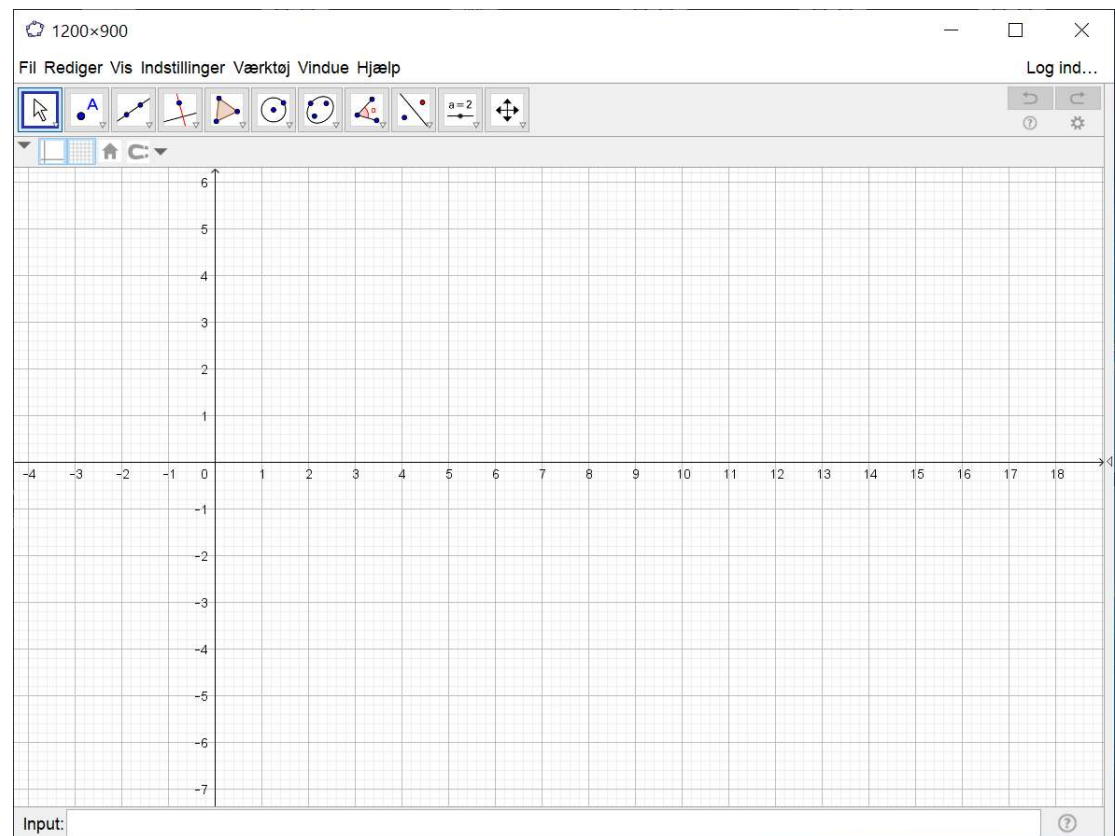
Hvornår anvendes Sinus og Cosinus-relationen ?

Hvad kendes og hvad søges?	Hvad bruges?
3 sider, men ingen vinkler kendes. De 3 vinkler søges.	Cosinus-relationen anvendes til at bestemme første vinkel. Herefter cosinus-relationen til den anden vinkel. Til slut anvendes 180 graders reglen til at bestemme den resterende.
2 sider, og en mellemliggende vinkel kendes. Manglende side og vinkler søges.	Cosinus-relationen anvendes til at bestemme den manglende side. Herefter sinus-relationen til at bestemme næste vinkel og til sidst 180 graders reglen til at bestemme den resterende vinkel.
2 vinkler og den mellemliggende side kendes. Manglende vinkel og sider ønskes fundet.	Den sidste vinkel beregnes vha. 180 graders reglen. De sidste 2 sider beregnes vha. Sinus-relationen.
2 vinkler og ikke-mellemliggende side kendes. Manglende vinkel og sider ønskes fundet.	Den sidste vinkel beregnes vha. 180 graders reglen. De sidste sider beregnes vha. Sinus-relationen.

Trigonometri

Konstruktion af målfaste trekanter foregår i programmet Geogebra Classic.

Når du starter Geogebra, så møder du den brugerflade. Den hedder *tegnefladen*.



Trigonometri 2

Eksempel.

Konstruer trekanten $\triangle ABC$ hvor $a = 5$, $b = 6$ og $\angle A = 55^\circ$ samt $\angle C = 65^\circ$.

Trigonometri

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The main workspace is a coordinate grid with the x-axis ranging from -4 to 33 and the y-axis from -10 to 4. A single blue point is plotted at the coordinates (3, -3). The text "Først placer man et punkt hvor trekanten skal starte." is centered on the grid. The left sidebar contains a list of tools: Punkt (selected), Punkt på objekt, Forbind / frigør punkt, Skæringsværktøj, Midtpunkt eller centrum, Komplekstal, Ekstremum, and Rødder. The top menu bar includes "Fil", "Rediger", "Vis", "Indstillinger", "Værktøj", "Vindue", and "Hjælp". The bottom status bar shows the system tray with icons for network, volume, and date/time (08:02, 06-07-2019).

Trigonometri

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The main workspace is a coordinate grid with x and y axes ranging from -4 to 33. A horizontal line segment is drawn from the point (3, -3) to (9, -3). A text box above the grid contains the text: "Vi tegner et linjestykke fra start punktet med længden 6". A dropdown menu is open on the left, showing various construction tools, with "Linjestykke med given længde" selected. A dialog box titled "Linjestykke med given længde" is open in the center, with a text input field labeled "Længde" and two buttons: "OK" and "Fortryd". The Windows taskbar is visible at the bottom, showing the time as 08:07 on 06-07-2019.

Trigonometri

Efterfølgende afsættes vinklerne A og C. Vha. menupunkt vinkel med en given størrelse. Husk at vælge vinkel A skal være med uret og vinkel C mod uret.

Trigonometri

GeoGebra Classic 5

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp

Log ind...

Så aftegnes der en cirkel med radius 6, svarende til længden af linjestykket a.

Cirkel ud fra centrum og radius

Radius

OK Fortryd

The image shows a screenshot of the GeoGebra Classic 5 software interface. The main workspace is a coordinate grid with x and y axes ranging from -4 to 33 and -10 to 6 respectively. A circle is drawn with its center at (6, 0) and a radius of 6. A horizontal line segment is drawn from the point (3, -2) to (9, -2). At each end of this segment, a green arc indicates an angle of 65 degrees. A dialog box titled 'Cirkel ud fra centrum og radius' is open, showing a 'Radius' field with the value '6' entered. The dialog has 'OK' and 'Fortryd' buttons. The top menu bar includes 'Fil', 'Rediger', 'Vis', 'Indstillinger', 'Værktøj', 'Vindue', and 'Hjælp'. The bottom status bar shows the system tray with icons for Windows, search, task view, and various applications, along with the date and time: '08:25 06-07-2019'.

Trigonometri

GeoGebra Classic 5

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp

Log ind...

Linje
Linjestykke
Linjestykke med given længde
Halvlinje
StykvistLinje
Vektor
Vektor fra punkt

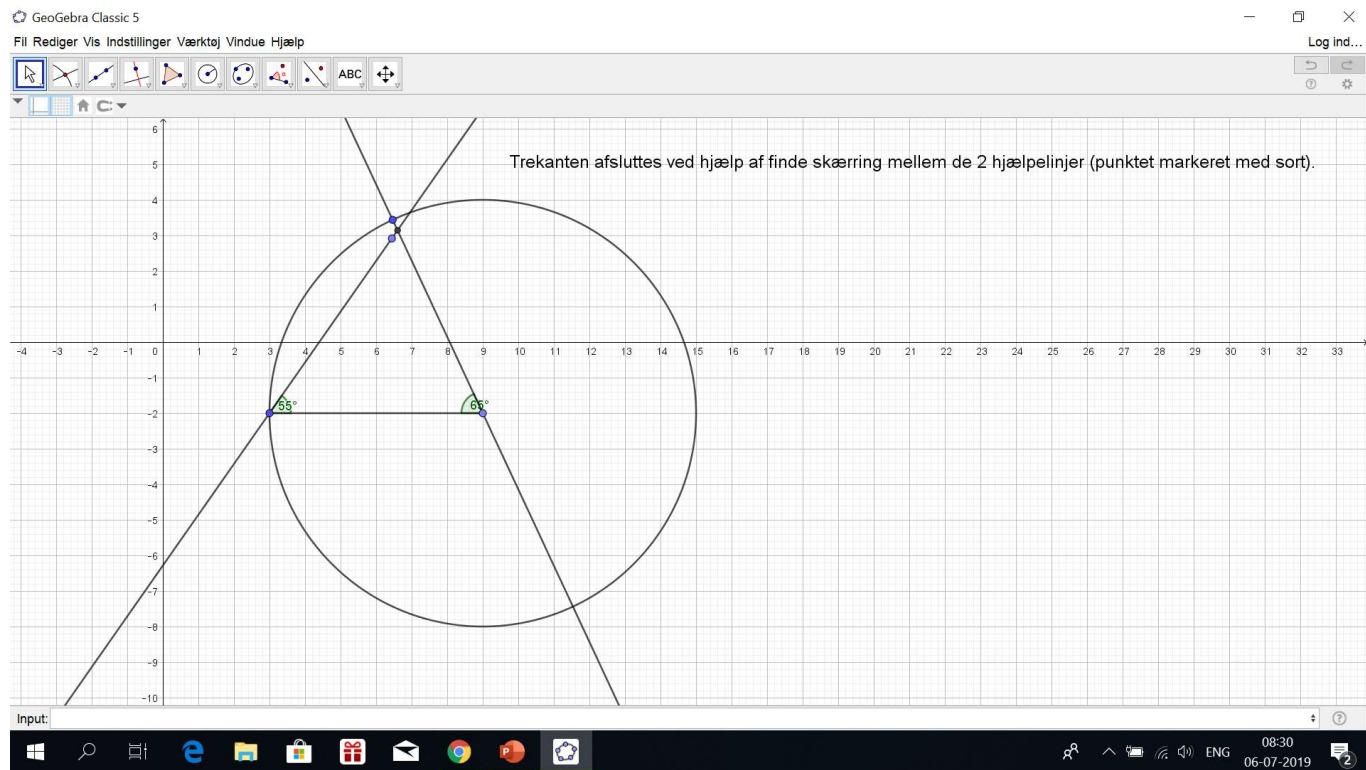
Så aftegnes der 2 hjælpelinjer fra hvert vinkelben i hhv. A og C.

Input:

08:27
06-07-2019

The image shows a screenshot of the GeoGebra Classic 5 software interface. The main workspace is a coordinate grid with x and y axes ranging from -4 to 33. A circle is drawn with its center at approximately (6.5, -2). A triangle is constructed with vertices at approximately (3, -2), (9, -2), and (6.5, 10). The angle at vertex (3, -2) is labeled 55° and the angle at vertex (9, -2) is labeled 65°. Two auxiliary lines are drawn from the vertices (3, -2) and (9, -2) to the circle. A text box in the upper right of the workspace contains the text: "Så aftegnes der 2 hjælpelinjer fra hvert vinkelben i hhv. A og C." The software's toolbar and menu are visible at the top, and the Windows taskbar is visible at the bottom.

Trigonometri



Trigonometri 2

GeoGebra Classic 5

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp

Log ind...

Tilføj linjer oveni de eksisterende linjer fra før.

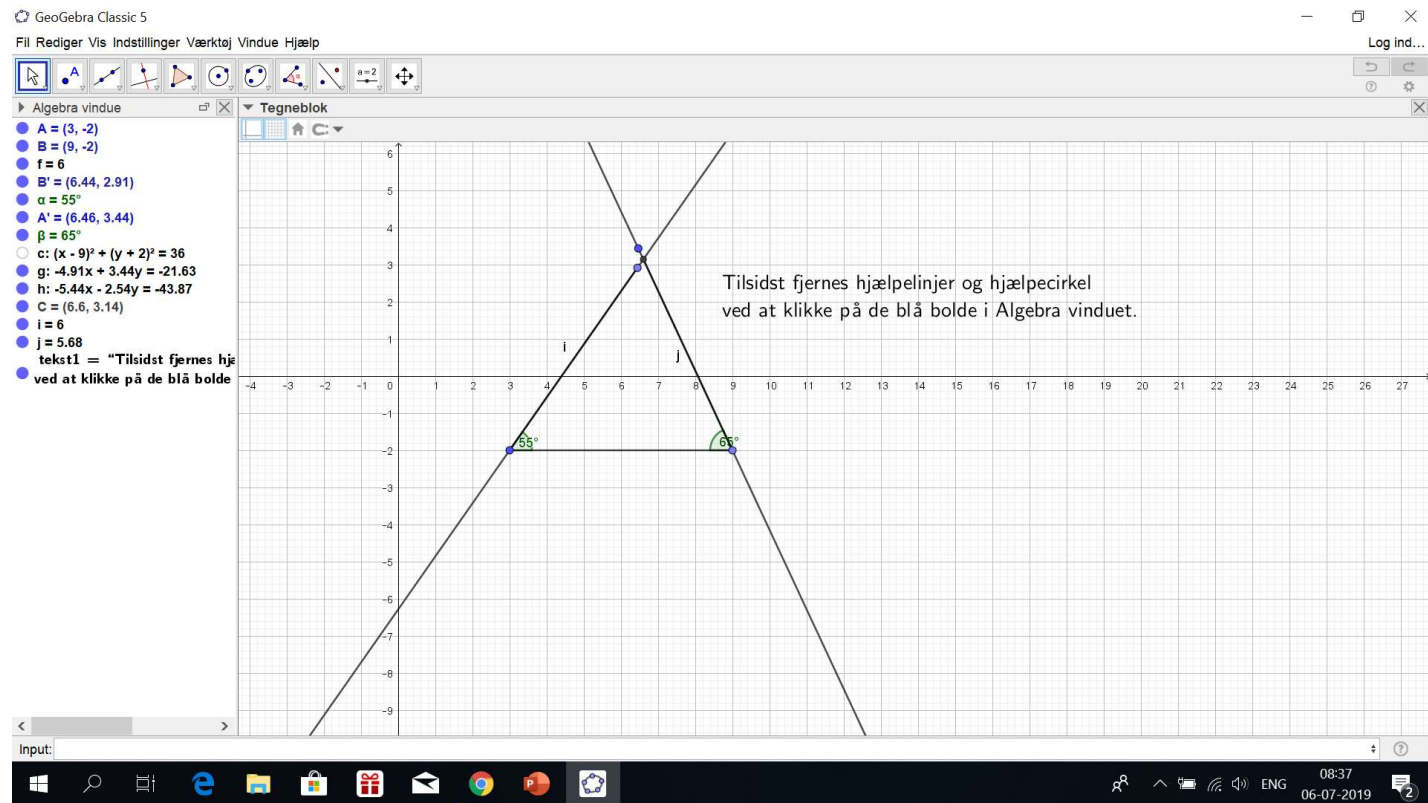
Linje

- Linjestykke
- Linjestykke med given længde
- Halvlinje
- StykvistLinje
- Vektor
- Vektor fra punkt

Input:

08:31
06-07-2019

Trigonometri



Trigonometri

GeoGebra Classic 5

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp

Vinkel
Vinkel med given størrelse
Længde
Areal
Hældning
Opret liste
Relation
Funktionsundersøgelse

Til sidst kan man afsætte den resterende vinkel ved at vælge kommandoen til venstre. Hvorefter man klikker på benene ved siden af vinklen.

55° 60° 65°

Input:

08:44
06-07-2019

Trigonometri 2

GeoGebra Classic 5

Man kan tilføje en såkaldt polygon for at give trekanten et kunstisk look.

55° 60° 65°

a b c_1

Input:

08:48 06-07-2019

Detailed description: The image shows a screenshot of the GeoGebra Classic 5 software interface. The main workspace is a coordinate grid with x and y axes ranging from -10 to 26. A triangle is plotted with vertices at approximately (3, -2), (9, -2), and (7, 3). The interior angles are labeled as 55°, 60°, and 65°. The sides are labeled 'a', 'b', and 'c₁'. A text box above the triangle contains the Danish text: "Man kan tilføje en såkaldt polygon for at give trekanten et kunstisk look." The top menu bar includes "Fil", "Rediger", "Vis", "Indstillinger", "Værktøj", "Vindue", and "Hjælp". A dropdown menu is open under "Værktøj", showing options: "Polygon", "Regulær polygon", "Stiv polygon", and "Vektor Polygon". The bottom status bar shows the system tray with icons for network, volume, and language (DAN), along with the time 08:48 and date 06-07-2019.

Trigonometri

GeoGebra Classic 5

Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp

Log ind...

Vinkel
Vinkel med given størrelse
Længde
Areal
Hældning
Opret liste
Relation
Funktionsundersøgelse

Man kan desuden tilføje sidelængden på tegningen.
(Husk at klikke vha. musen på den side du skal have påtegnet længden.)

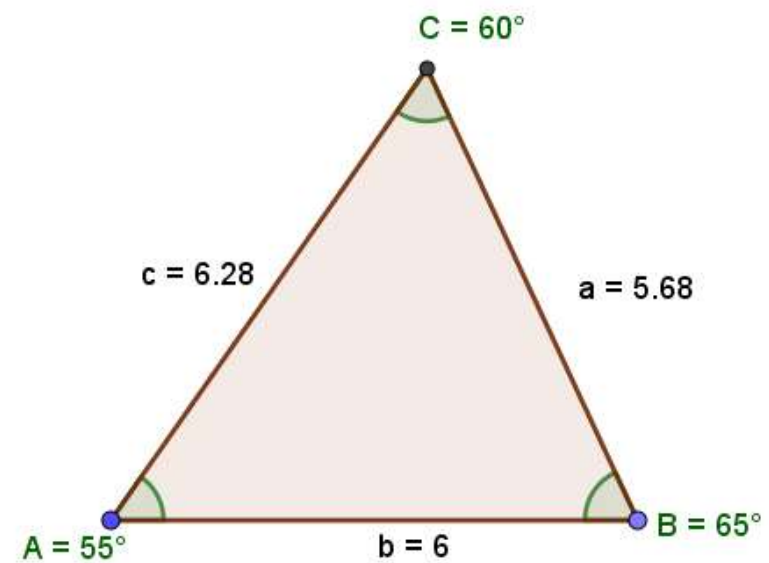
6.28
60°
5.68
55°
6
65°

Input:

Windows taskbar: 08:51 06-07-2019

Trigonometri

Hermed er den målfaste tegning konstrueret fra Eksemplet.



Opgaver

Øvelse 55, 56, side 99, Kernestof Mat1.

Opgave 552-554, side 115, Kernestof Mat1.

Øvelse 65, 66, side 101, Kernestof Mat1.

Opgave 539, side 113, Kernestof Mat1.

Opgave 522-524, side 110-111, Kernestof Mat1.

Trigonometri

Undervisning del 2

Trigometri 2

Sætning (Sinus-relationen)

Antag du givet en vilkårlig trekant hvor dens vinkler og modstående sider er oplyst. Således gælder følgende.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Trignometri 2

Sinus-relationen (**Bevis**)

Bevis arealformlen (Appelsin-formlen).

Vi tegner indledende en vilkårlig trekant ABC, og opdeler i 2 retvinklede trekanter, $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$.

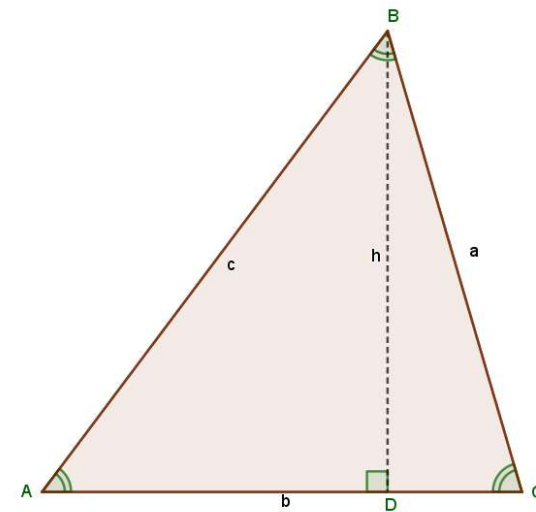
Vi husker, at formlen for arealet af en trekant $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

Samt at $\sin(C) = \frac{h}{a}$ (retvinklet trekant), hvor $h = a \cdot \sin(C)$

Ved at benævne grundlinjen g i trekanten ABC, som b , så kan arealet skrives.

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

(Kaldes også Appelsin-formlen.)



Trignometri 2

Appelsinformlen og sinus-relationen.

Husk !

Alle 3 varianter af appelsinformlen giver samme areal for trekanten.

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(B)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(A)$$

Trignometri 2

Bevis Sinus-relationen

- 1) Vi anvender de 3 varianter af appelsinformlen og sætter dem lig hinanden.

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$$

Trigonometri 2

Bevis Sinus-relationen fortsat

2) Vi dividerer ligningen med størrelsen $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

Trigonometri 2

Bevis fortsat

3) Vi forkorter udtrykket.

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

Trigonometri 2

Bevis fortsat.

4) Tilsidst opnås

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Hermed er sætningen bevist. \square

Trigonometri 2

Sætning: Cosinus-relationen

Antag du har en vilkår trekant ABC, hvor du kender 2 sider og en mellemliggende vinkel, så gælder følgende.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos}(C)$$

Dette er Cosinus-relationen.

Trigonometri 2.

Bevis: Cosinus-relationen.

Antag du har givet den vilkårlige trekant $\triangle ABC$, og den opdeles i de retvinklede trekanter $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ hvor grundlinjen b af $\triangle ABC$ er delt op i 2 stykker $b - x$ og x .

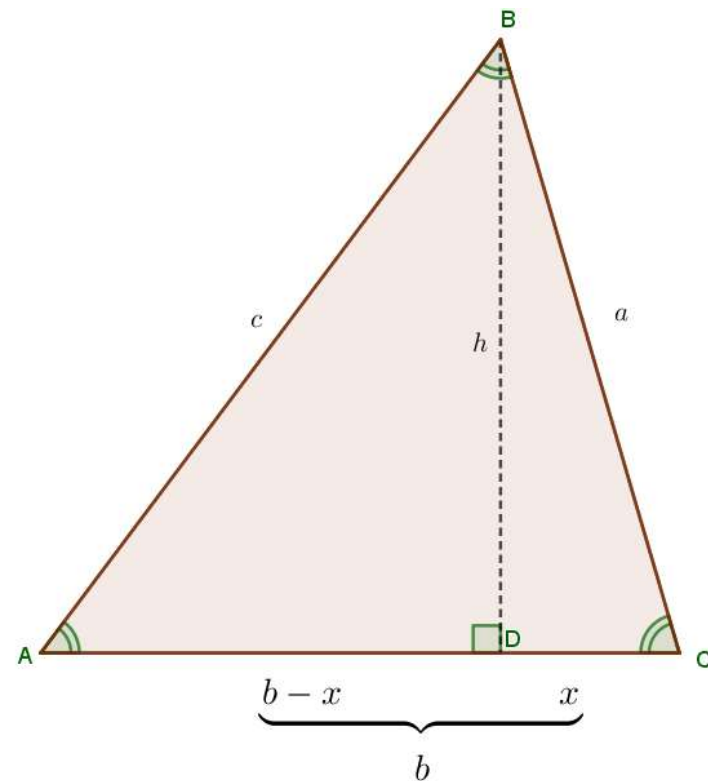
1) Disse trekanter kan udtrykkes vha. Pythagoras.

$$c^2 = (b - x)^2 + h^2 \text{ (trekant } \triangle ABD \text{) (**)}$$

$$a^2 = x^2 + h^2 \text{ (trekant } \triangle BCD \text{) (**)}$$

2) Trækker ** fra *.

$$c^2 - a^2 = (b - x)^2 + h^2 - (x^2 + h^2)$$



Trigonometri 2.

Bevis: Cosinus-relationen fortsat.

3) Udtrykket forkortet og c^2 isoleres.

$$c^2 - a^2 = (b - x)^2 + h^2 - (x^2 + h^2) \Leftrightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x + h^2 - x^2 - h^2 \Rightarrow$$

Vi anvender 1.kvadratsætning på $(b - x)^2$

$$c^2 = a^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x + h^2 - x^2 - h^2$$

.

Trigonometri 2

Bevis: Cosinus-relationen fortsat.

4) Herefter opnås udtrykkes $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x$

Vi fra den retvinklede trekant at $\angle C$ kan udtrykkes $\text{Cos}(C) = \frac{x}{a} \Rightarrow$

$$x = \text{Cos}(C) \cdot a$$

Trigonometri 2

Bevis: Cosinus-relationen fortsat.

5) Vi erstatte dette med x i $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x$

Således at , $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot (a \cdot \text{Cos}(C)) \Leftrightarrow$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos}(C)$$

Cosinus-relationen er hermed bevist \square

Trigonometri 2

Cosinus-relationen.

Cosinus-relationen findes i 3 varianter (til at bestemme sider)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cos}(C)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{Cos}(B)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{Cos}(A)$$

Trigonometri 2

Cosinus-relationen.

Hvis vi kender 3 sider og ingen vinkler, så kan vinklen bestemmes vha. Cosinus-relationen.

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Bemærk , at afhængig om du skal bestemme vinkel $\angle C$, $\angle B$, $\angle A$, så bytter bogstaverne a,b,c plads i ovenstående.

Opgaver

Opgave 557 – 561, Kernestof Mat1, side 116.

Opgave 562 (minus e,f,g), Kernestof Mat1, side 116

Opgave 563 – 565, Kernestof Mat 1, side 116.

Trigonometri

Undervisning del 3

Trigonometri 3

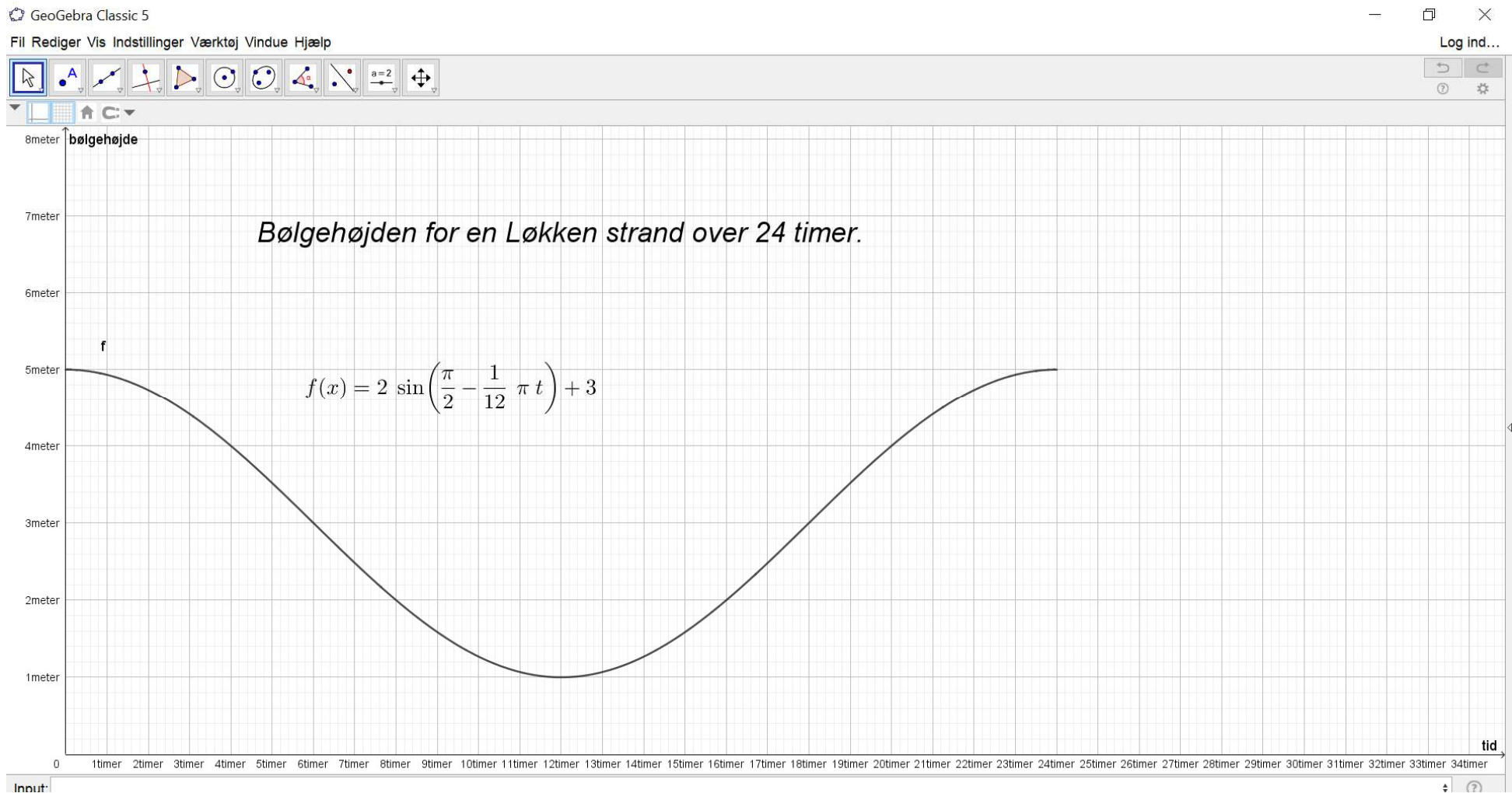
Periodisk funktion.

Vi så tidligere, at harmoniske svingning kan udtrykkes som en funktion.

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \phi) + k$$

A = amplituden, ω = vinkelhastigheden, ϕ = faseforskydning og
 k = forskydningskonstanten.

Trigonometri 3 (Eksempel)



Trigonometri 3

Bestemmelse af konstanter for en harmonisk svingning.

$$A = \frac{\textit{maksimum} - \textit{minimum}}{2} \qquad k = \frac{\textit{maksimum} + \textit{minimum}}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (Hvis perioden kendes), og } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (Hvis vinkelhastighed kendes)}$$

Værdien ϕ oplyses opgaven.

Trigonometri 3

Eksempel

For en harmonisk svingning gælder der følgende.

$y_{max} = 3.5$, $y_{min} = 0.5$ og $\phi = \frac{\pi}{3}$ samt at grafen for funktionen er angivet.

- a) Bestem konstanterne A , ω og k .
- b) Bestem forskriften for den harmoniske svingning på formen.

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \phi) + k$$

Trigonometri 3

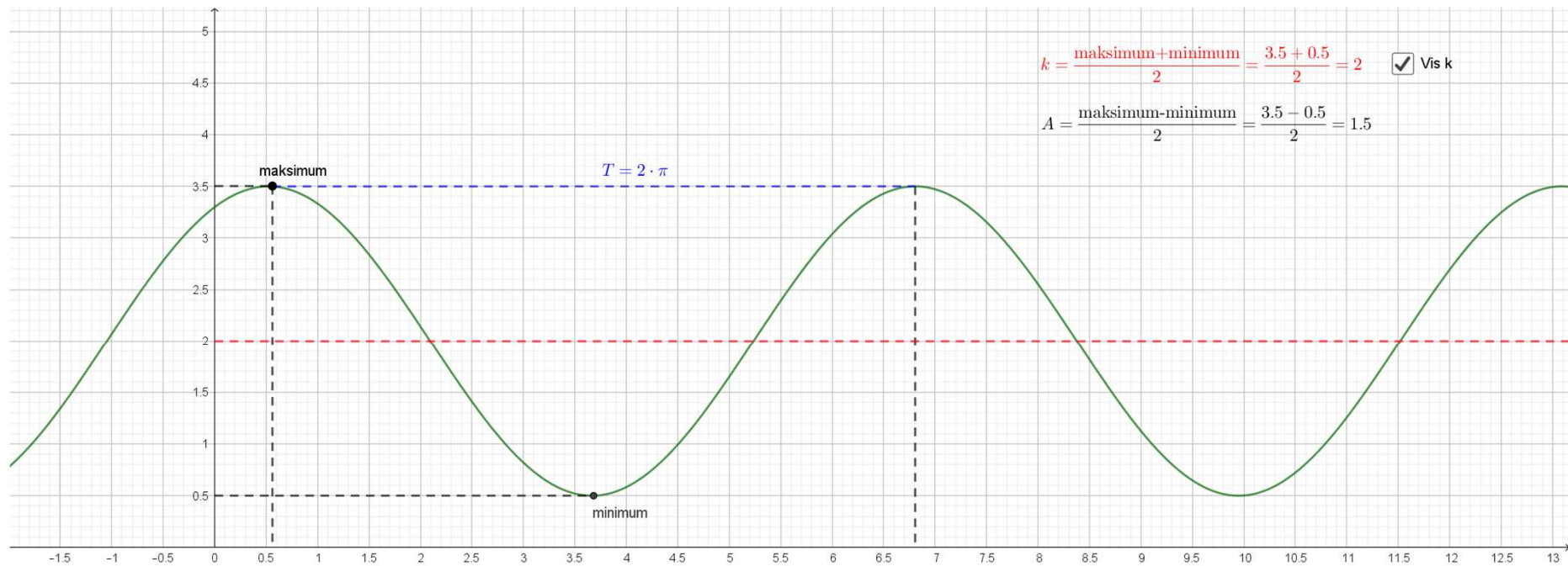
Løsning(Eksempel).

a) Vi bestemmer konstanterne $A = \frac{3.5-0.5}{2} = 1.5$ og $k = \frac{3.5+0.5}{2} = 2$

For at bestemme ω skal vi aflæse perioden på grafen.

Trigonometri 3

Løsning(Eksempel)



Trigonometri 3

Løsning (eksempel)

Vi aflæser perioden på grafen til at være $T = 2\pi$ og herved bestemme ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Dvs. at $\omega = 1$.

Trigonometri 3

Løsning(Eksempel)

b) Slutteligt kan vi opstille forskriften for den harmoniske svingning.

$$f(x) = 1.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot x\right) + 2$$

Hermed er opgaven løst.

Opgaver

Øvelse 38, side 45, Kernestof Mat2.

Øvelse 46- 47, side 47, Kernestof Mat2.

Opgave 310 – 314 og 317, side 48-49, Kernestof Mat2