Undervisning 11

Differentialregning

Differentialregning.

Lineær vækst, hvad var det nu?

Vi har tidligere set på en type af vækst kaldet *lineær vækst*. Dvs. en udviklingen som kan beskrives ud fra en model af typen

$$y = a \cdot x + b$$

Hvor b er startværdien og a hvor meget y vokser eller aftager med, hvis x vokser med 1.

Differentialregning.

Lineær vækst, hvad var det nu?

Vi vælger nu at indføre en ny betegnelse for værdien a i den lineær vækst. Vi kalder nu værdien a *væksthastigheden* for udviklingen y.

Dvs. den betegner hvor hurtigt udviklingen y vokser eller aftagende, hvis x vokser med 1.

Differentialregning.

Eksempel(væksthastighed)

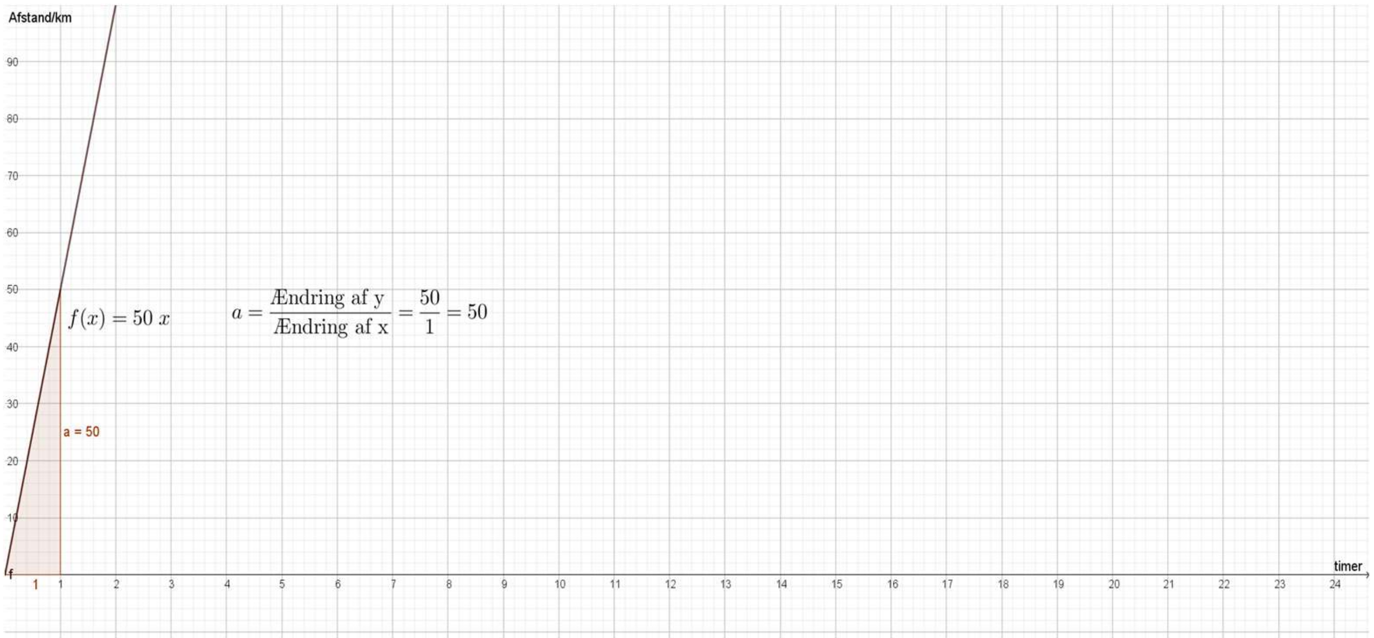
Mette køre 100 km på 2 timer, hvad er hastigheden?

$$\frac{100\ km}{2\ timer} = 50\ km/t$$

Dvs, at hastigheden og dermed væksthastigheden efter én time er $50\ km/t$.

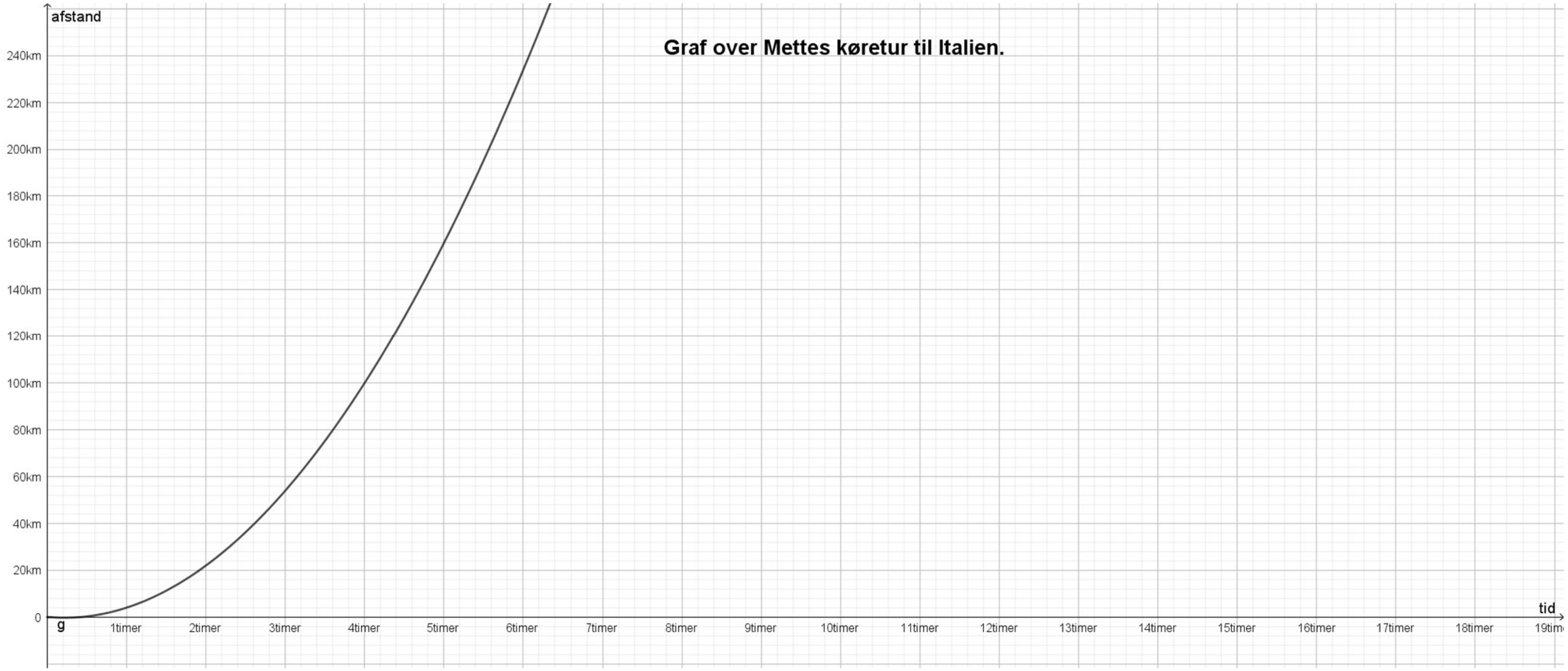
Differentialregning.

Grafisk fremstilling af Mettes hastighed, hvis hun køre 100 km på 2 timer.



Differentialregning.

Mettes biltur til Italien kan illustreres ud fra nedenstående graf. Den kan desuden beskrives ud fra forskriften $f(x) = 7 \cdot x^2 - 3 \cdot x$, hvor x er antal timer og f(x) tilbagelagt afstanden i km til tiden x.



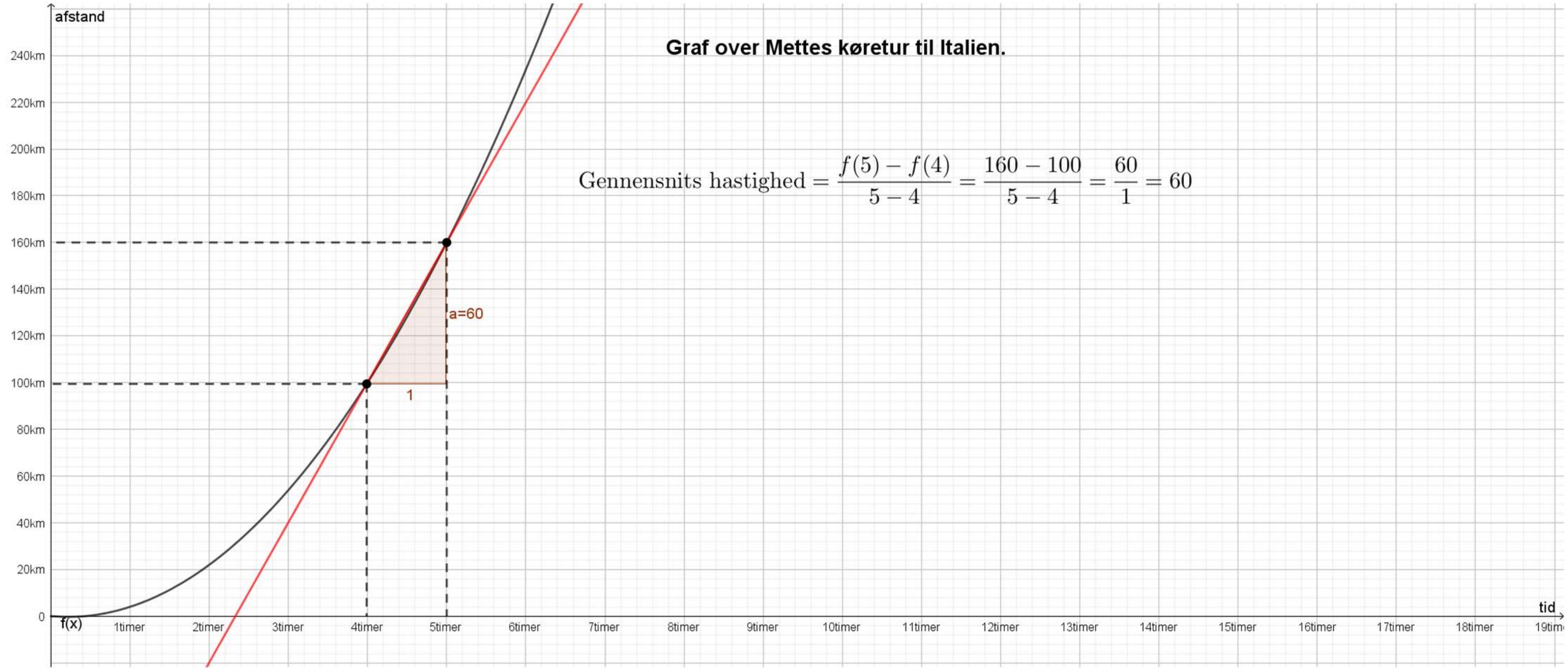
Differentialregning.

Mette gns. Hastighed

Vi så tidligere, at hvis Mette kørte 100 km på 2, så var Mettes hastighed 50 km/t.

Vi er nu interesseret at bestemme Mettes gns. Hastighed mellem time 4 og 5. Dette gøres at bestemme hældningen for den linje, der går igennem de 2 punkter på grafen fra før.

Differentialregning.



$$\text{Gennensnits hastighed} = \frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{160-100}{5-4} = \frac{60}{1} = 60$$

Differentialregning.

Med andre ord, så er Mettes gennemsnitshastighed mellem time 4 og 5, 60 km/t, idet hældningen for linje som går igennem punkterne (4,100) og (5,160) er 60.

Men hvad er den øjeblikkelige hastighed til tiden x= 5 så ?

Differentialregning

Ved time x = 5 træder Mette lidt ekstra på speederen, så biler flytter sig et lille stykke ekstra, som vi vælger at kalde h. Inden bil når op i den nye hastighed.

Hvis vi antager, at bilen her rykker sig h = 0.01 meter, så kan vi ved hjælp udtrykket fra før beregne hastigheden i det øjeblik.

$$v = \frac{\text{æ}ndringen\ i\ afstand}{\text{æ}ndringen\ i\ tid} = \frac{f(5+0.01)-f(5)}{0.01} = \frac{0.67}{0.01} = 67 \text{ km/t}$$

Idet h er så lille, så kan vi sige, at gns. Hastigheden i det øjeblik er i virkeligheden tæt på at være den øjeblikkelige hastighed til tiden x = 5.

Differentialregning.

Gns og øjeblikkelig hastighed.

Antag nu at størrelsen h fra før er så lille, at den er næsten ubetydelig og derfor nærmer sig 0. Med andre ord man siger at $h \to 0$. Dette har denne betydning, at linjen hvis hældning kun rammer i

x = 5, nu kaldes en tangent.

Differentialregning

Hældningen for denne tangent kan derfor udtrykkes.

$$a_t = f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(5+h) - f(5)}{h} \right)$$

Hældningen for tangenten i x = 5 kaldes også differentialkvotienten i x = 5 og har symbolet $f'(5)$. (Udtales f-mærke af 5) .

Differentialregning.

Bestemmelse af øjeblik hastighed hvis h nærmer sig 0.

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{7\cdot(5+h)^2-(7\cdot 5^2-3\cdot 5)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(5+h)^2-25+3\cdot h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(7\cdot h+73) = 73 = \mathrm{a_t} = \mathrm{f}'(5)$$

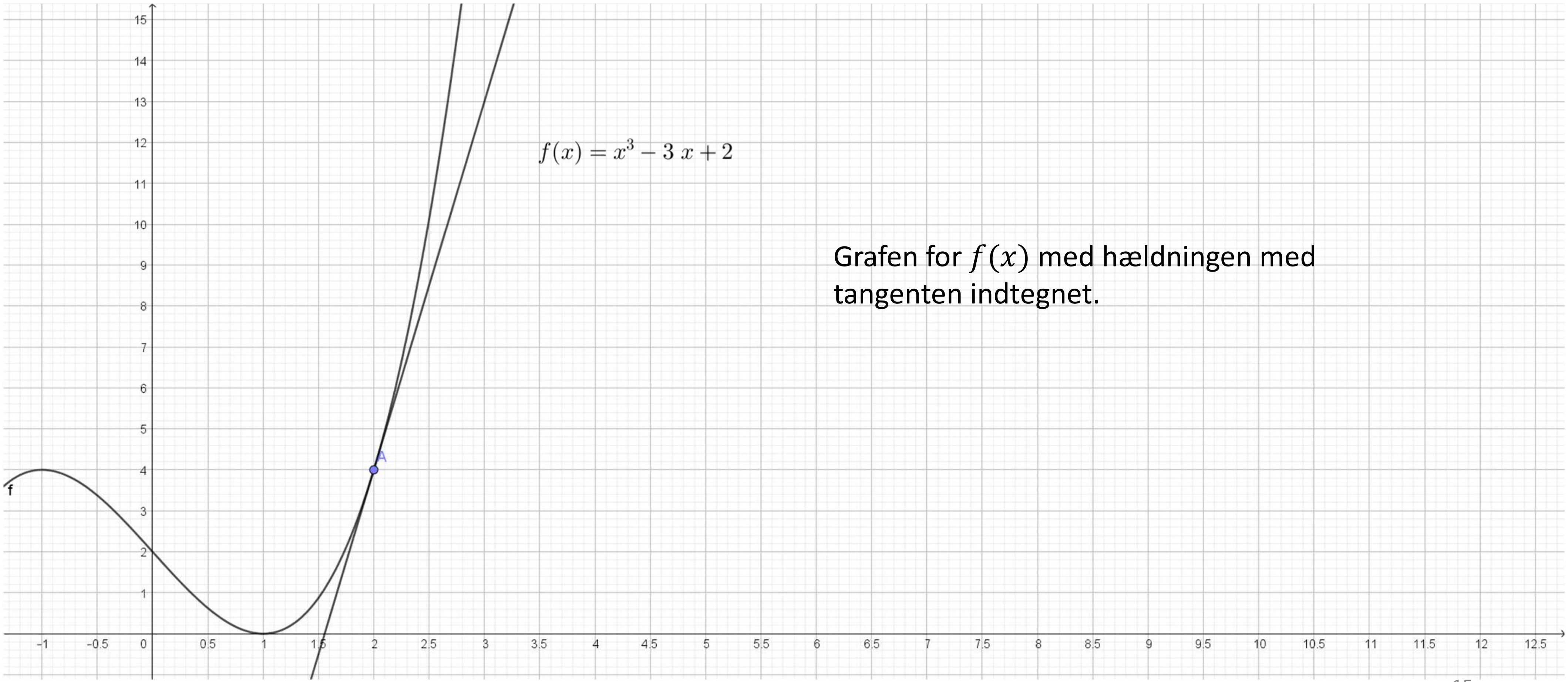
Dvs. at den øjeblikkelige hastighed til tiden x = 5 er 73 km/t, $a_t = 73$.

Differentialregning.

Eksempel(aflæsning af hældning for tangent)

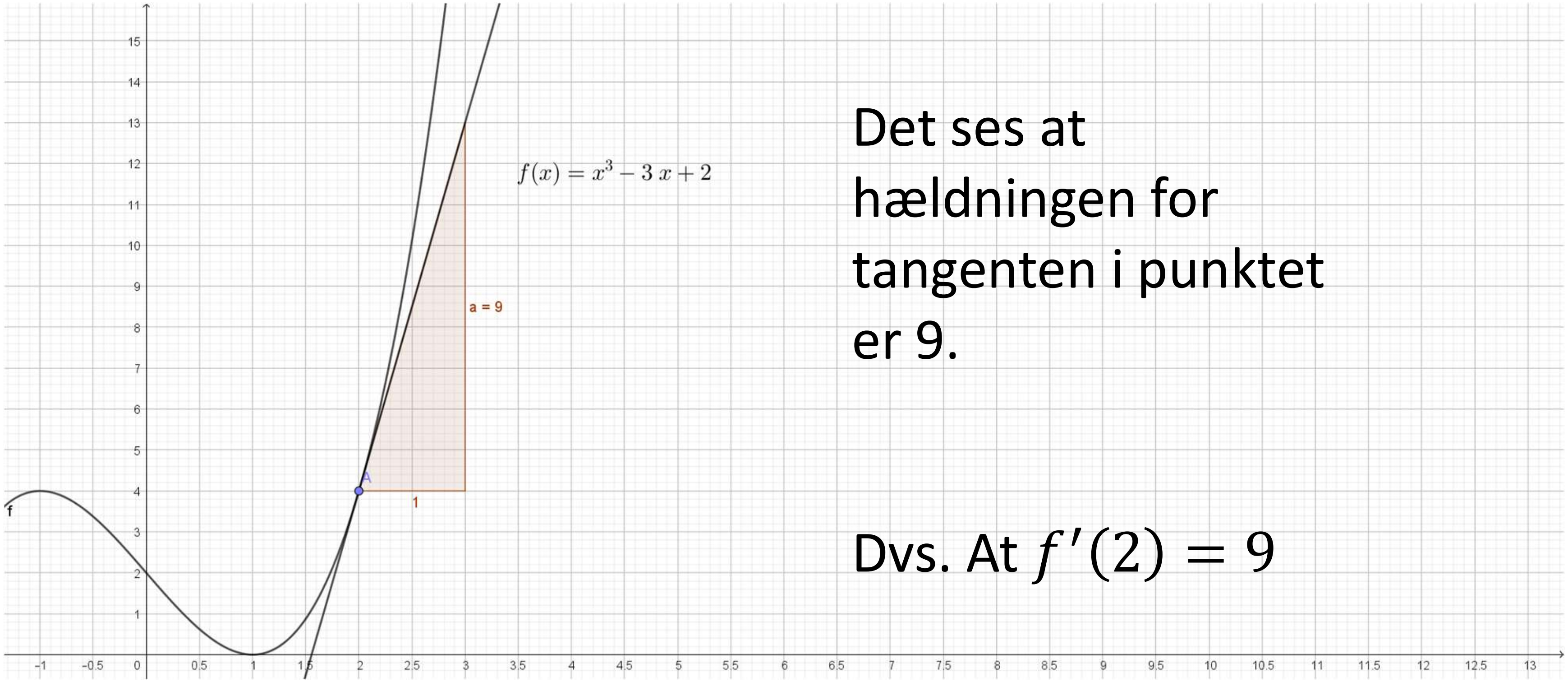
Antag du har givet funktionen $f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$, hvor vi ønsker at bestemme $f'(2)$. Vi at dette må svare til at være hældningen for den tangent til $f(x)$ som netop skære i punktet $A(2, f(2))$

Differentialregning.



Grafen for $f(x)$ med hældningen med tangenten indtegnet.

Differentialregning.



Det ses at hældningen for tangenten i punktet er 9.

Dvs. At $f'(2) = 9$

Differentialregning.

Alternativ kan vi bestemme $f'(2)$ vha. Maple, hvis foreskrift for f kendes.

(Bemærk, at f’(2) indtastes ved at bruge appostrof fra tastaturet.)

$with(Gym)$:

$f(x) := x^3 - 3 \cdot x + 2$

$$f := x \mapsto x^3 - 3\,x + 2$$

$f'(2) = 9$

Differentialregning.

Om differentialkvotienten.

Differentialkvotienten i x_0 har den generelle formel

$$f'(x_0) = a_t = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right)$$

Differentialregning.

Differentialkvotient og sekanten.

- Brøken $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kaldes sekanten og betegnes a_s.

- Tælleren i brøken kaldes funktionstilvæksten og betegnes Δy.
- Nævneren i brøken kan skrives $\Delta\mathrm{x}$.

Hvilket betyder at sekanten kan udtrykkes $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Differentialregning.

Kort om grænseværdi.

lim står for limit(grænseværdi), og et tal som fortæller at jo mindre værdien h er (dvs. jo tættere den er på nul). Så vil hældningen for sekanten nærme sig tangenten.

Differentialregning.

Sekant versus Differentialkvotient.

- Sekanten skære en graf for en funktion i 2 punkter.

- Differentialkvotienten (så frem den findes) skære grafen for f i netop et punktet.

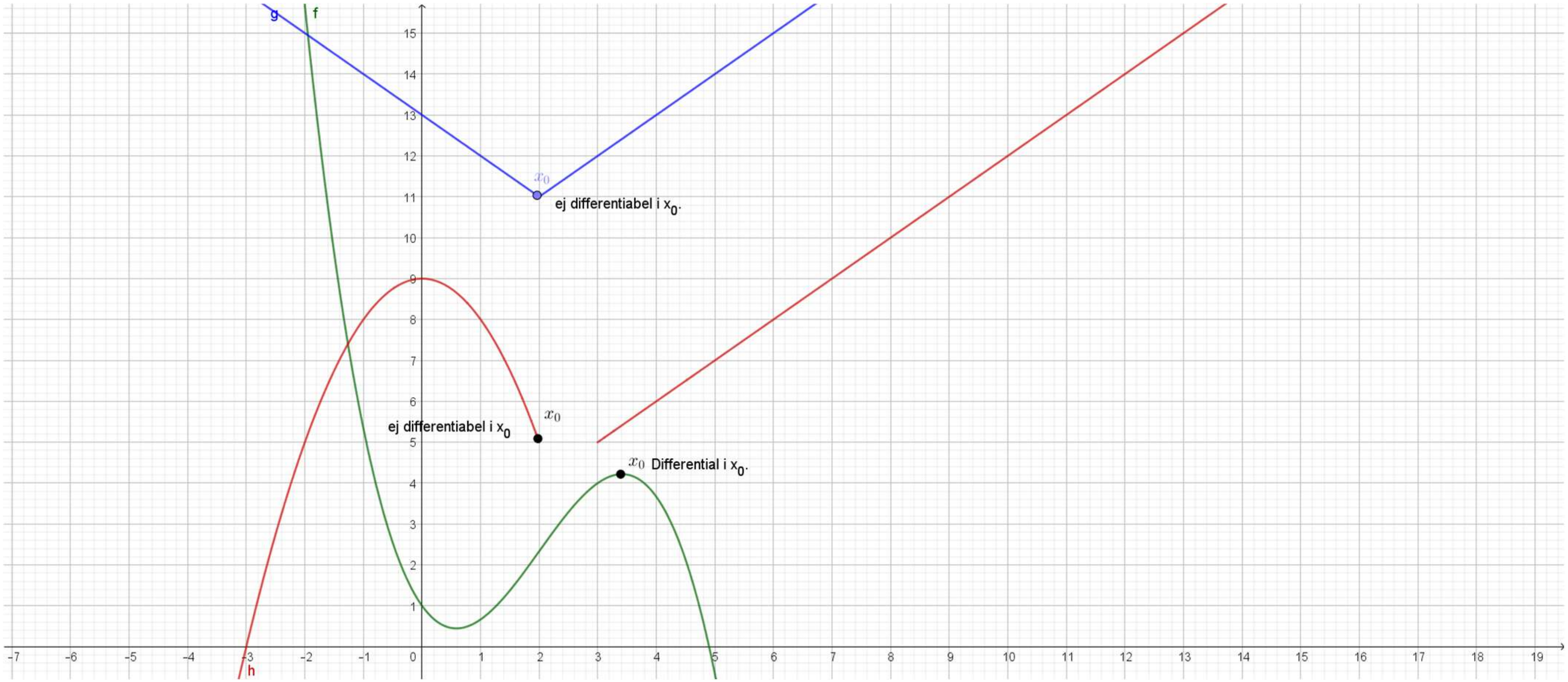
Differentialregning.

<u>Hvornår findes differentialkvotienten ?</u>

1. Hvis grafen for en funktion f er sammenhængende,
   dvs. den er uden huller. (kontinuer).
2. Hvis grafen er glat og uden spidser.
3. Hvis 1. og 2. er opfyldt, så siger man grænseværdien findes.

Hvis disse betingelserne 1-3 ikke er opfyldt, så er funktionen ej differentiabel i punktet x_0.

Differentiabelregning.



Differentialregning

Om differentialkvotienten.

Differentialkvotienten i x_0 kaldes *væksthastigheden* i x_0, idet viser hvor meget grafen for $f(x)$ vokser eller aftager i x_0.

Væksthastigheden er desuden den det som **hældningen** for tangenten i x_0. Dvs. $f'(x_0)$.

Opgaver

Øvelse 36, Mat2-bogen side 99.

Opgave 701, Mat2-bogen side 104.

Opgave 704-705, Mat2-bogen side 104.

Differentialregning.

<u>Afledte funktion $\boldsymbol{f'(x)}$, hvad er det?</u>

I det foregående så vi hvordan vi kunne bestemme hældningen for tangenten til en differentiabel funktion $f(x)$. Hvis betingelserne for at funktionen er differentiabel i x_0 er overholdt.

Funktionen som forekommer når vi bestemmer tangenthældningen kaldes den *afledte funktion* af $f(x)$ og betegnes $f'(x)$.

Differentialregning.

Tabel over udvalgte afledte funktioner(resten finder i din formelsamling).

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
$f(x)$	k	$a \cdot x + b$	$a \cdot x^2$	a^x	e^x	x^a	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\ln(x)$
$f'(x)$	0	a	$2 \cdot a \cdot x$	$a^x \cdot \ln(a)$	e^x	$a \cdot x^{a-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$

Vi vil senere bevise udvalgte af disse afledte funktioner. Ved hjælp af metoden 3.trinsreglen.

Differentialregning.

3.trinsreglen.

1. Vi opskriver sekanthældningen.
2. Forkorter sekanthældningen mest mulig.
3. Lad h gå mod nul,så tangenthældningen $f'(x)$ opnås.

Differentialregning.

Sætning: Funktionen $f(x) = k$ har den afledte funktion$f'(x) = 0$

Bevis.

Vi indsætter i 3.trinsreglens punkt 1.

$$a_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k-k}{h}$$

Differentialregning.

Bevis fortsat

Vi forkorter sekanten mest muligt (3.trinsreglen trin to).

$$a_s = \frac{0}{\mathrm{h}} = 0$$

Differentialregning.

Bevis fortsat

Slutteligt vi lader $h \to 0$, så $a_t = \lim_{h \to 0} (a_s) = f'(x) = 0$

(3.trinsreglen trin 3).

Dvs. $f'(x) = 0$ når $f(x) = k$

Hermed er sætningen bevist $\square$

Differentialregning

Sætning:

Hvis $f(x) = a \cdot x^2$, så er den afledte funktion $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x$

Bevis.

1. Vi bestemmer først sekanthældningen.

$$a_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a \cdot (x+h)^2 - a \cdot x^2}{h}$$

Differentialregning.

Bevis fortsat

2. Skriver sekanten op og forkorter mest mulig. (3.trinsreglen trin 2).

$$\frac{a \cdot (x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \frac{a \cdot (x^2 + h^2 + 2 \cdot h \cdot x) - a \cdot x^2}{h}$$

$$= \frac{a \cdot x^2 + a \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot h \cdot x - a \cdot x^2}{h}$$

Differentialregning.

Bevis fortsat

2. Vi forkorter sekanten bla. ved hjælp af 1.kvadratsætning.

$$a_s = \frac{\cancel{a \cdot x^2} + a \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot h \cdot x \cancel{- a \cdot x^2}}{h} = \frac{a \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot h \cdot x}{h}$$

$$a_s = \frac{\cancel{h} \cdot (a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x)}{\cancel{h}} = a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x$$

Differentialregning.

3. Til sidst lader vi $h \to 0$, så med andre ord

$$a_t = f'(x) = \lim_{h \to 0}(a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x) = 2 \cdot a \cdot x$$

Med andre ord, så er $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x$ når $f(x) = a \cdot x^2$

Hermed er sætningen bevist ▫

Differentialregning.

Sætning:

Hvis vi har given en funktion af typen: $f(x) = a \cdot x + b$, så er den afledte funktion $f'(x) = a$.

Bevis:

1. Vi indsætter i tretrinsreglen punkt1. $a_s = \frac{a \cdot (x+h) + b - (a \cdot x + b)}{h}$
2. Vi forkorter a_s mest mulig.

Differentialregning.

Bevis fortsat

2. $a_s = \frac{a \cdot (x+h)+b-a \cdot x-b}{h} = \frac{a \cdot x+a \cdot h+b-a \cdot x-b}{h} = \cancel{h}\frac{a}{\cancel{h}} = a$

3. Vi lader h gå mod nul, så $a_t = \lim_{h \to 0}(a_s) = a = f'(x)$

Dvs. at $f'(x) = a$ for $f(x) = a \cdot x + b$

Hermed er sætningen bevist ▫

Differentialregning.

Eksempel

Vi ønsker at bestemme den afledte funktion af følgende funktioner, vha tre.trinsreglen

$$f_1(x) = x^2 \,,\; f_2(x) = x^3$$

Differentialregning.

Eksempel fortsat

$$f_1(x) = x^2$$

1. Vi bestemmer sekanthældningen

$$a_s = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + h^2 + 2 \cdot x \cdot h\ - x^2}{h}$$

Differentialregning.

Eksempel fortsat

2. Vi forkorter sekanten mest mulig.

$$a_s = \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2 \cdot x \cdot h \ - \cancel{x^2}}{h} = \frac{h^2 + 2 \cdot x \cdot h}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot (h + 2 \cdot x)}{\cancel{h}}$$

Hvilket giver en $a_s = h + 2 \cdot x$

Differentialregning.

Eksempel fortsat

3. Vi bestemmer tangenthældningen a_t.

$$a_t = \lim_{h \to 0}(a_s) = \lim_{h \to 0}(h + 2 \cdot x) = 2 \cdot x$$

Dvs. $f_1'(x) = 2 \cdot x$ for $f_1(x) = x^2$

Differentialregning.

Eksempel

$$f_2(x) = x^3$$

1. Vi bestemmer sekanthældningen for funktionen.

$$a_s = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h) - x^3}{h}$$

Differentialregning.

Eksempel

$$a_s = \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h) - x^3}{h} = \frac{(x^2 + h^2 + 2 \cdot h \cdot x) \cdot (x+h) - x^3}{h}$$

$$a_s = \frac{x^3 + x \cdot h^2 + 2 \cdot h \cdot x^2 + x^2 \cdot h + h^3 + 2 \cdot h^2 \cdot x - x^3}{h}$$

Differentialregning.

Eksempel fortsat.

2. Vi forkorter sekanten mest mulig.

$$a_s = \frac{\cancel{x^3} + h^2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \cdot h + x^2 \cdot h + h^3 + 2 \cdot h^2 \cdot x \cancel{- x^3}}{h}$$

$$a_s = \frac{3 \cdot h^2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot h}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot (3 \cdot h \cdot x + 3 \cdot x^2)}{\cancel{h}}$$

Differentialregning.

Eksempel

3. Vi lader nu h gå mod nul, og bestemmer tangenthældningen.

$$a_t = \lim_{h \to 0}(a_s) = \lim_{h \to 0}(3 \cdot x \cdot h + 3 \cdot x^2) = 3 \cdot x^2$$

Dvs. $f_2'(x) = 3 \cdot x^2$ for $f_2(x) = x^3$

(Men heldigvis har vi en formel til at differentiere potensfunktioner.)

Differentialregning.

Sætning: Differentiation af en potensfunktion.

En funktion af typen $f(x) = x^a$, hvor a ikke må være så nul.

Den har den afledte funktion $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Bevises ikke.

Differentialregning

Eksempel.

Antag du har givet funktionerne $f_1(x) = x^2$ og $f_2(x) = x^3$

Bestem $f'(x)$ for $f_1(x)$ og $f_2(x)$.

Løsning: Vi indsætter i formel for differentiere en potensfunktion, så

$$f_1'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x \text{ og } f_2'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$$

Opgaver

Øvelse 27, side 97, mat2-bogen.

Opgave 707, side 105, mat2-bogen.

Differentialregning.

<u>Regneregler for differentiable funktioner.</u>

Regel 1 + 2

Sætning: Hvis 2 funktioner $f(x)$ og $g(x)$ begge er differentiable, så betyder dette at deres sum $h(x)$ eller differens $h(x)$ ligeledes er differentiabel.

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \qquad\qquad h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

(Bevises senere.)

Differentialregning.

Eksempel(differentiation af sum).

Vi ønsker at differentiere $h(x) = 2 \cdot x + 2$

Ved at anvende sumreglen fås:

$$h'(x) = (2 \cdot x)' + (2)' = 2 + 0 = 2$$

Differentialregning.

Eksempel(differentiation af differens af to funktioner).

Vi har opgivet følgende funktion $h(x) = x^2 - \ln(x)$, som vi ønsker at differentiere.

Vi indsætter i reglen for differentiation af differens af to funktioner.

$$h'(x) = (x^2)' - (\ln(x))' = 2 \cdot x - 1/\mathrm{x}$$

(Se afledte funktioner skema side. 96, mat2-bogen eller formelsamling s.21)

Differentialregning.

Regel 3(differentiation of konstant gange funktion).

Sætning:Lad k være et tal som er forskellig fra nul, og $f(x)$ være en differentiabel funktion.

Så gælder at funktionen $h(x) = k \cdot f(x)$ ligeledes er differentiabel.

Dvs. at $h'(x) = k \cdot f'(x)$ (bevises senere).

Differentialregning.

Eksempel(Differentation af konstant gange funktion.)

Antag du har givet følgende funktion $h(x) = 2 \cdot \ln(x)$

Bestem $h'(x)$.

Løsning: $h'(x) = 2 \cdot (\ln(x))' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{\mathrm{x}}$

Opgaver

Opgave 801-804, side 118, mat2-bogen.

Opgave 809 (spg.a-d), side 118, mat2-bogen.

Differentialregning

Vi har set på at væksthastigheden for en differentiabel funktion i punktet x_0 svare til hældningen for den tangent (dvs. rette linje), som netop skære funktion i x_0.

Ligningen for den tangent-linje kan bestemmes ud fra følgende formel:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Hvor $(x_0, f(x_0))$ er tangentpunktet

Differentialregning

Eksempel.

Bestem ligningen for den tangent som skære grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 2 \cdot \ln(x)$ i punktet $\big(1, f(1)\big)$.

Løsningen: Først bestemmes hældningen for tangenten

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Differentialregning

Eksempel fortsat.

Herefter bestemmes funktionsværdien til $x_0 = 1$.

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

Tangent-ligningen kan herefter konstrueres:

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

Differentialregning

Eksempel fortsat.

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

Dvs. ligningen for tangenten til $f(x)$ i punktet $(1, f(1))$ er

$$y = x$$

Differentialregning

Eksempel

Samme resultat som før.

Bemærk, at resultat kræver tangentpunktet og funktionen defineres separat i Maple dokumentet.

Funktionen defineres:

$f(x) := x^3 - 2 \cdot \ln(x) = x \rightarrow x^3 - 2\ln(x)$

Tangentpunktet defineres:

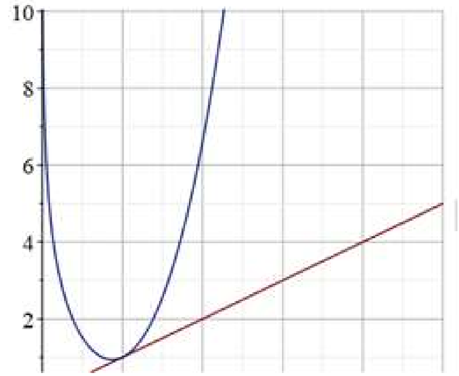
$x_0 := 1 :$

Ligningen opstilles:

$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = x$

Dvs. tangentens ligningen $y = x$

$plot(\{x, f(x)\}, x = 0..5, 0..10, gridlines)$



Differentialregning

Sætning(Tangentens ligning).

Antag at funktionen $f(x)$ er differentiabel i x_0, så kan ligningen for dens tangent i dette punktet skrives.

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Differentialregning.

Bevis

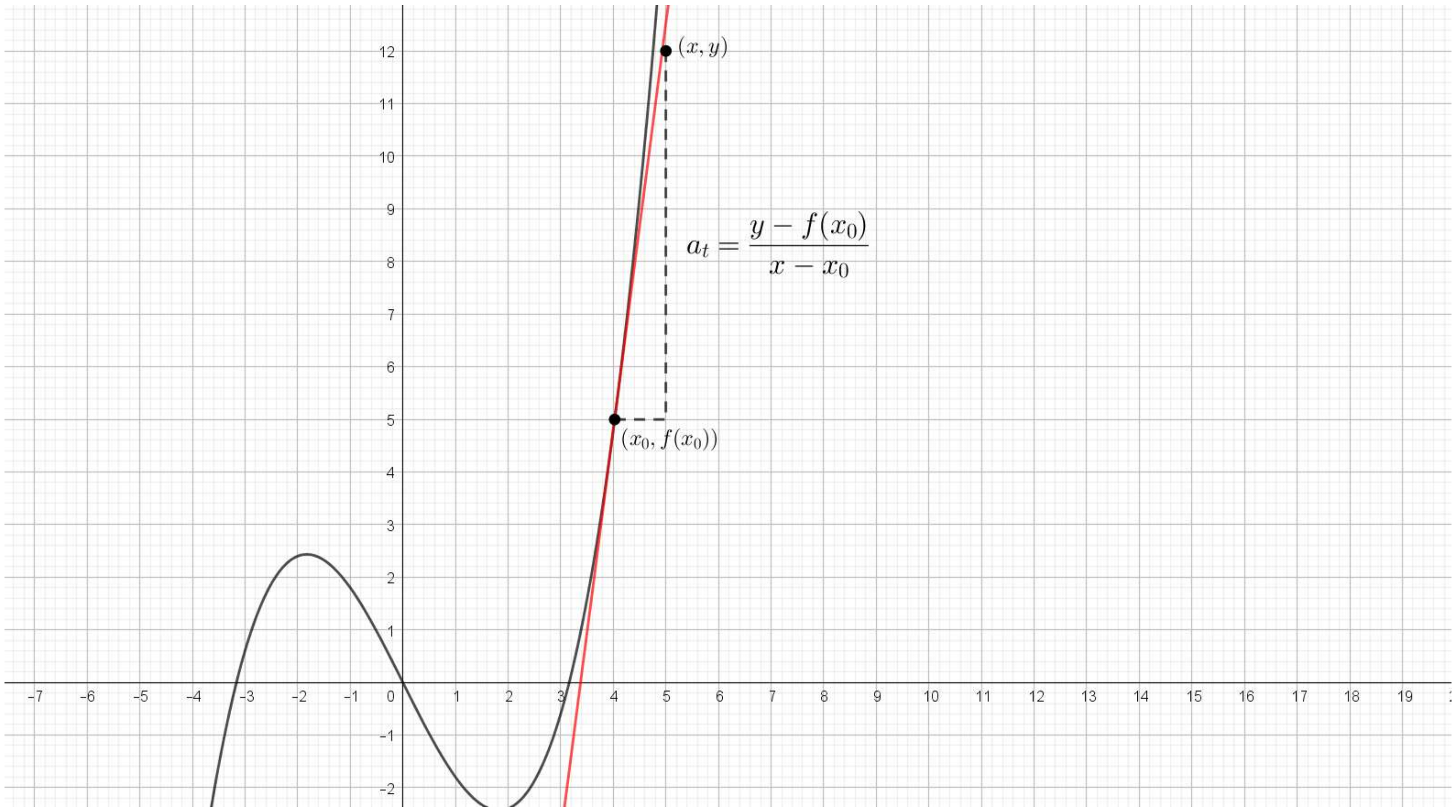
Vi ved at tangentpunktet er $(x_0, f(x_0))$ og vælger dernæst et punktet på tangenten (x, y). Hældningen for denne bestemmes.

$$a_t = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differentialregning

Bevis fortsat

Grafisk illustration af situationen.



Differentialregning.

Bevis fortsat.

Ved isolere y i foregående fås:

$$a_t \cdot (x - x_0) = y - f(x_0) \Rightarrow y = a_t \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Idet vi ved at $f'(x_0) = a_t$, så kan ovenstående skrives.

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ Hermed er sætningen bevist ▫

Opgaver

Opgave 805, side 118, Mat2-bogen.

Opgave

Lad $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i følgende punkt på grafen: $P(2, f(2))$. Du skal gøre det manuelt.