Undervisning 12

Differentialregning del 2

Differentialregning del 2

Differentialkvotient hvad var det ?

Vi så tidligere, at hældningen for den tangent som skære grafen for en differentiabel funktion $f(x)$ i punktet x_0 er benævnt $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Differentialregning 2

Sætning:(Konstantreglen)

Antag vi har en differentiabel funktion $f(x)$ og en konstant k, hvor $k \neq 0$. Så gælder det, at der findes en anden differentiabel funktion $h(x)$, defineret $h(x) = k \cdot f(x)$.

Hvorom det gælder $h'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$

Differentialregning 2

Bevis(konstantreglen).

1+2. Ved hjælp af tretrins-reglen, så kan sekanten opstilles og denne forkortes mest mulig.

$$a_s = \frac{k \cdot f(x_0 + h) - k \cdot f(x_0)}{h} = \frac{k \cdot (f(x_0 + h) - f(x_0))}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(konstantreglen) fortsat.

3. Ved at lade $h \to 0$, så ses at tangenten nu kan skrives.

$$a_t = k \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} \right) = k \cdot f'(x_0) = h'(x_0)$$

Hermed er sætningen bevist. ▫

Differentialregning 2

Sætning:(sumreglen)

Antag at funktionen $f(x)$ og funktionen $g(x)$ begge differentiable i x_0.

Så gælder at der findes en funktion $h(x)$, som også er differentiabel i x_0. Med den egenskab at $h(x) = f(x) + g(x)$ og den har den afledte funktion $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Differentialregning 2

Bevis(Sumreglen).

1. Vi bestemmer sekantens hældning fra tretrinsreglen.

$$a_s = \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(sumreglen) fortsat.

2. Vi forkorter sekanthældningen mest muligt (3.trinsreglen del 2).

$$a_s = \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(sumreglen) forsat

2. Det kan nu også omskrives (se definitionen for sekant).

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(sumreglen) forsat.

2. Vi skriver sekanten om vha. reglen $\left(\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(sumreglen) fortsat

3. Ved at lade $h \rightarrow 0$, så fås tangents hældning.

$$a_t = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)+\lim_{h \to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

Differentialregning 2

Bevis(sumreglen) forsat.

3. Det ses at $a_t = f'(x_0) + g'(x_0) = \mathrm{h}'(\mathrm{x}_0)$

(Reglen for at bestemme $h'(x_0)$, hvis $h(x) = f(x) - g(x)$ kan bevises på tilsvarende måde).

Hermed er sætningen bevist ▫

Opgaver

Opgave 810, side 118, Mat2-bogen.

Opgave 811, side 118, Mat2-bogen.

Differentialregning

<u>Bemærkning om differentiation af trigonometriske funktioner.</u>

De trigonometriske funktioner $f(x) = \cos(x)$ og $\mathrm{g}(x) = \sin(x)$ har ligeledes afledte funktioner.

$f(x) = \cos(x)$: $f'(x) = -\sin(x)$

$g(x) = \sin(x) : g'(x) = \cos(x)$

(Bevises ikke).

Differentialregning 2

Eksempel

Bestem $f'(x)$ når $\mathrm{f(x)} = \sin(x) + x^2$

Løsning: $f\,'(x) = \cos(x) + 2 \cdot x$

Differentialregning 2

Sætning: (Produktreglen)

Antag funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ begge er differentiable i x_0.

Så gælder det, at der findes en differentiabel funktion $h(x)$, hvor $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Samt at den afledte funktion af denne er

$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Differentialregning 2

Bevis(produktreglen).

1. Vi bestemmer sekanthældningen.

$$a_s = \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(produktreglen) fortsat.

2. Vi får nu en god ide og trækker $f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$ fra i tælleren og lægger $f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$ til i tælleren. Hvilket giver følgende udtryk for sekanten.

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis(produktreglen) fortsat

2. Det nye udtryk kan splittes op, så vi får følgende udtryk for a_s.

$$a_s = \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) \cdot g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0) \cdot (g(x_0+h) - g(x_0))}{h}$$

(Se side 116 i Mat2-bogen for en ekstra mellemregning).

Differentialregning 2

Bevis(Produktreglen) forsat

3. Herefter bestemmes tangenthældningen, dvs. $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = f'(x_0) \text{ og } \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) = g'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0) \text{ og } \lim_{h\to 0}\big(f(x_0)\big) = f(x_0)$$

Differentialregning 2

Bevis(produktreglen) fortsat

3. Tangenthældningen a_t er derfor.

$$a_t = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) = h'(x_0)$$

Hermed er sætningen bevist ▫

Differentialregning 2

Eksempel.

Givet funktionen $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, bestem $f'(x)$.

Løsning:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \ln(x) + x^2 \cdot (\ln(x))'$$

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{x}} = 2 \cdot x \cdot \ln(x) + x$$

Opgaver

Opgave 814, side 119, Mat2-bogen.

Øvelse 18 (spg. a-c), side 113, Mat2-bogen.

Differentialregning 2

Sætning :(Sammensat funktion).

Lad der være givet to differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$, så gælder det at $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ ligeledes er differentiabel.

(f er den ydre funktion og g er den indre funktion.)

Samt at $h'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$ (kaldes også kædereglen).

(Bevises ikke på HFB)

Differentialregning 2

Eksempel

Lad der være givet $f(x) = \ln(x^2)$, bestem $f'(x)$.

Løsning: $u = x^2$ (indre) og $f(u) = \ln(u)$ (ydre).

$$f'(x) = (f(u))' \cdot u' = \frac{1}{x^2} \cdot 2 \cdot x = \frac{2}{x}$$

Opgaver 818

Opgave 818, side 119, Mat2-bogen.

Øvelse 18 (spg. d-e), side 113, Mat2-bogen.

Differentialregning 2

Sætning: Lad $f(x) = e^x$ være givet, som er differentiabel for alle x_0.
Den er har differentialkvotienten $f'(x_0) = e^{x_0}$.

Differentialregning 2

Bevis(Den afledte af $f(x) = e^x$)

1+2. Vi indsætter i tretrinsreglen punkt. 1 og forkorter i trin. 2

$$a_s = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)$$

Differentialregning 2

Bevis(Den afledte af $f(x) = e^x$) fortsat.

3. Til sidst lader vi $h \to 0$. Med andre ord, så

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(e^{x_0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) \right) = e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^{x_0}$$

Hermed er sætningen bevist. ▫

Differentialregning 2

Sætning: Lad funktion $f(x) = \sqrt{x}$, som er differentiabel for $x_0 \geq 0$**.**
Denne funktion har differentialkvotienten $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$

Differentialregning 2

Bevis

1. Vi indsætter i tretrinsreglen punkt. 1

$$a_s = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

Herefter får vi ideen at vi gange brøken fra før med $\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$

$$a_s = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \right)$$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

2. Nu kan vi med hjælp fra kvadratsætning 3 omskrive udtrykket for sekanten.

$$a_s = \frac{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

2. Vi kan nu udtrykke sekanten som følgende.

$$a_s = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

3. Ved at lade $h \to 0$, så gælder at tangentens hældning $f'(x_0)$ er da.

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Hermed er sætningen bevist. ▫

Differentialregning 2

Sætning: Lad $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $x \neq 0$ være en differentiabel funktion i.
Så gælder det at $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Bevis:

1. Vi bestemmer først sekanten $\quad a_s = \dfrac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

$$\mathrm{a}_s = \frac{\dfrac{x_0}{x_0(x_0+h)} - \dfrac{(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{x_0 \cdot (x_0+h)}}{h} = -\frac{1}{x_0 \cdot (x_0+h)}$$

Differentialregning 2

Bevis fortsat

$$a_s = -\frac{1}{x_0 \cdot (x_0 + h)}$$

Til sidst lader vi $h \to 0$, så vi kan bestemme tangentens hældning.

Differentialregning 2

Bevis fortsat

$$a_t = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{x_0 \cdot (x_0 + h)} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Hermed er sætningen bevist ▫