I et tidligere note gennemgik eksponentiel vækst, hvor vi behandlede, at hvis du sætter penge i banken K_0 til en bestemt rente r og lader dem stå i n – timerne, så kan man bestemme hvor mange penge kan hæve efter en periode.

Situationen kan beskrives ud fra renteformlen, $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ hvor K_0 kaldes startværdien og $1 + r$ kaldes fremskrivningsfaktoren. Vi lærte desuden, at hvis vi benævner K_0 som b og $1 + r$ som a, og kalder K for f(x), så fås den eksponentielle vækstfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Herunder blev belyst, at hvis a > 1 så er funktionen voksende og hvis a ligger mellem nul og 1

(skrevet 0 < a <1), så er funktionen aftagende.

Bevis for a og b i den eksponentielle vækstfunktionen, hvis 2 punkter er angivet.

Du kan bestemme a og b i en eksponentielvækst funktion ud fra 2 punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ ved hjælp af følgende formler. $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$ og $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$ (hvis P indsættes) og $b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$ (hvis Q indsættes).

Bevis for a

1) Punkterne P og Q indsættes i udtrykket for den eksponentielle vækst)

   (*) $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og (**) $y_2 = b \cdot a^{x_2}$

2) (**) og (*) divideres med hinanden og udtrykket reduceres.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

3) Vi ønsker jo at isolere a, så derfor isoleres a. Dette forekommer ved at anvende potensregneregel nummer 3 (fra notesættet om potensregneregler) på højre side af udtrykket ovenfor.

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

4) Ved at tage den $x_2 - x_1$ – rod (den niende potensregneregel fra s64 i AB1-bogen) på begge sider af ligmed fås da

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Og hermed er formlen a bevist.

Bevis formlen for b.

1) P eller Q -punktet indsættes i $f(x) = b \cdot a^x$

   $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ (P indsat) (**)

   $y_2 = b \cdot a^{x_2}$ (Q indsat) (*)

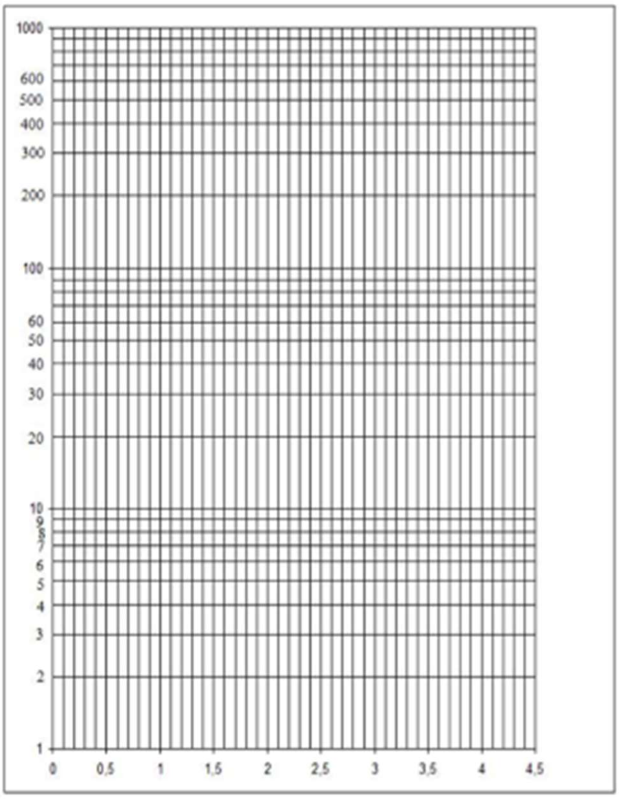
2) b isoleres i enten (**) eller (*)

$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$ (b isoleret i **) og $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$ (b isoleret i *)

Hermed er formlen for b bevist.

Når man tegner en eksponentielvækst funktion på enkelt-logartimisk papir. Det vil sige papir, hvor y-aksen er inddelt efter logaritmer (1, 10, 100, 1000). så vil $f(x) = b \cdot a^x$ fremkomme som en ret linje.

Et eksempel enkelt-logartimisk på side 18 i AB1 eller nedenfor.

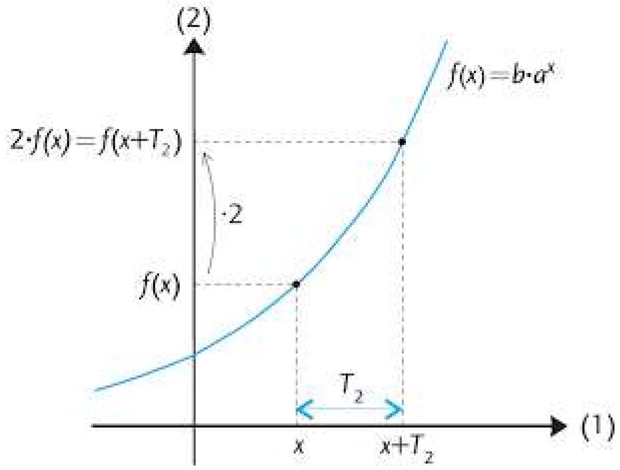


Fordoblings og halveringskonstant.

Når man arbejder med eksponentielvækst, så er det relevant at kunne sige noget hvor lang tid der skal gå før f(x) eller y-værdien fordobles eller halveres. Dette kan konkretiseres ved begreberne fordoblings eller halveringskonstant.

Fordoblingskonstant.

Antag du har en voksende eksponentiel-funktion, illustreret nedenfor.



Vi ønsker at finde den værdi på tegningen skrevet T_2, som beskriver hvor lang tid der går, før en tilhørende y-værdi til funktionen er fordoblet.

Dette sker ud fra formlen $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$

Bevis for T_2

1) værdierne $(x, f(x))$ og $(x + T_2, 2 \cdot f(x))$ indsættes i udtrykket for f(x):

   $f(x) = b \cdot a^x$ (*)

   $2 \cdot f(x) = b \cdot a^{x+T_2}$ (**)

2) Herefter divideres (**) med (*) og udtrykket reduceres.

$$\frac{2 \cdot f(x) = b \cdot a^{x+T_2}}{f(x) = b \cdot a^x} \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^{x+T_2}}{a^x}$$

3) Ved at anvende en potensregneregel fås.

$$2 = a^{x+T_2-x} = a^{T_2}$$

Bevis fortsat

4) Idet vi ønsker isolerer T_2 anvendes logaritme-regel 3 fra notet om logartimer.

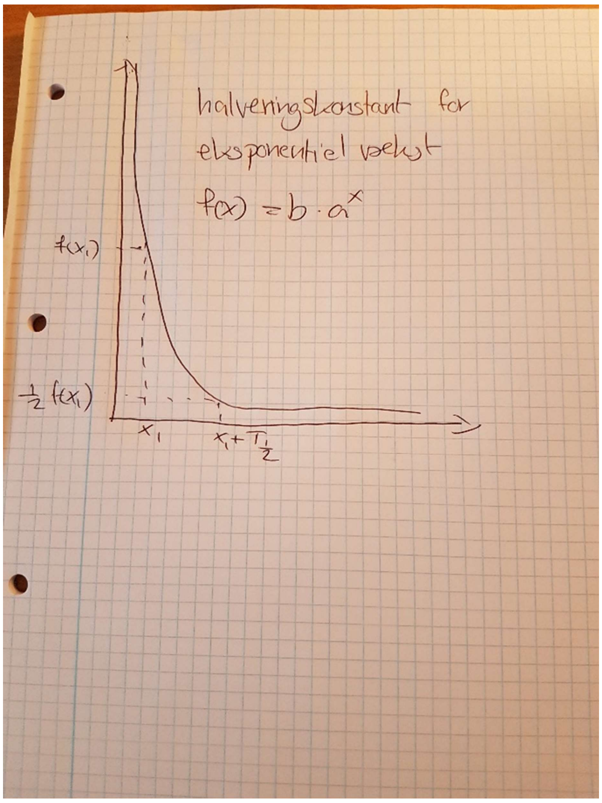
$$\log(2) = \log(a^{T_2}) = \mathrm{T}_2 \cdot \log(a)$$

5) Tilsidst isoleres T_2

$$\log(2) = T_2 \cdot \log(a) \Rightarrow \; T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Hermed er formlen for fordoblingskonstanten bevist.

Tilsvarende kan vi bevise halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$.



<u>Bevis for $T_{\frac{1}{2}}$</u>

1) Vi indsætter punkterne $((x_1, f(x_1))$ og $(x_1 + T_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \cdot f(x_1))$ i funktionen.

(fortsættes næste side)

Bevis fortsat

$f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$ (*)

$\frac{1}{2} \cdot f(x_1) = b \cdot a^{x_1 + T_{\frac{1}{2}}}$ (**)

Og (**) divideres med (*) og udtrykket reduceres.

2) $\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot f(x_1) = b \cdot a^{x_1 + T_{\frac{1}{2}}}\right)}{f(x_1) = b \cdot a^{x_1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{a^{x_1 + T_{\frac{1}{2}}}}{a^{x_1}}\right)$

Hvorefter vi ligesom i bevist for T2 anvender en potensregneregel for at isolerer T1/2.

3) $\frac{1}{2} = a^{x_1 + T_{\frac{1}{2}} - x_1} = a^{T_{\frac{1}{2}}}$

4) Til sidst anvendes en logaritme-regneregel for at få T1/2 til at stå alene.

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(a^{T_{\frac{1}{2}}}\right) = T_{\frac{1}{2}} \cdot \log(a)$ hvilket betyder.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$$

og dette var så beviserne for halverings og fordoblingskonstanterne.

På den følgende side gennemgås kort, hvordan man ville eksponentiel-vækst i situationer, hvor der er mere end 3 punkter.

Eksponentielvækst med flere end 2 punkter.

Når man arbejder med eksponentielvækst, så vil man ofte stå med opgaver hvor der er angivet flere end 2 punkter eller målinger. Og man så skal finde udtrykket for den eksponentielle-vækstfunktion. Her kan vi ikke anvende formlerne som bruger ved 2 punkter og bliver derfor nød til at anvende Maple. Her indføres bedste eksponentiel-funktion. Den funktion ligger "tættest" på alle målingerne. Dette afgøres af værdien

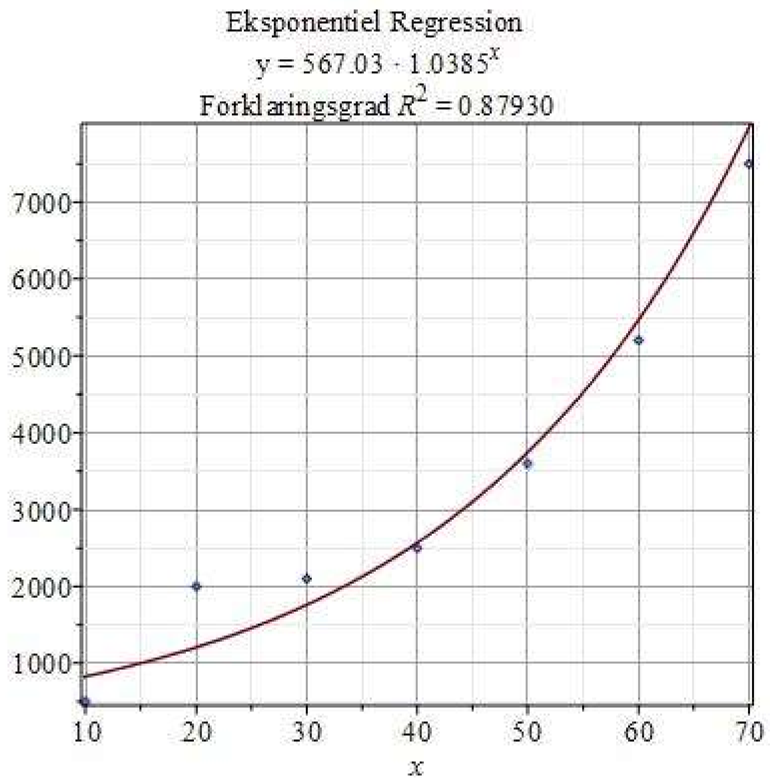
R^2 kaldet korrelationskoefficienten, og jo tættere den er på 1, desto "pænere" end funktion.

Derfor inddrages følgende eksempel fra bogen.

I forbindelse med et undervisningsforløb om stationsbyers vækst har nogle elever på Internettet fundet følgende talværdier for befolkningen i stationsbyen Grindsted:

År efter 1900, x	10	20	30	40	50	60	70
Befolkningstal, y	500	2000	2100	2500	3600	5200	7500

Vi undersøger om udviklingen i befolkningen er eksponentiel ved at indsætte tallene i Maple i 2 liste, og bruger funktionen fra Gym-pakken ExpReg og får derfor grafen.



Idet det ses, at $R^2 = 0.879$, dvs. tæt på 1. Så må udviklingen i befolkning antage som værdien eksponentiel.

Indekstal - teori og anvendelse.

Når man arbejder med tabeller, så er det tit nødvendigt at kunne sige noget om

den udvikling som de beskriver.

Man vælger et basisår og giver det værdien 100 %, og kan ved hjælp at dette regne den procentvise udviklingen til det efterfølgende år.

Til dette indføres begrebet indekstal.

Formel: $I_{år} = \dfrac{\textit{Værdien i det aktuelle år}}{\textit{Værdien i startåret.}} \cdot 100$

Eksempel(udviklingen af antal elever på en skole).

Antal elever på en skole for perioden 2009-2017.

Vi sætter 2009 som vores basisår, og bestemmer herefter den procentmæssige udviklingen i forhold til basisåret for de efterfølgende år.

År	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Antal elever	200	240	310	370	410	500	600	650	710
indeksta l	100	$\frac{240.}{200} \cdot 100 =$ 120.0000\ 000	$\frac{310}{200} \cdot 100 = 155$	$\frac{370}{200} \cdot 1$\ 00 $= 185$	$\frac{410}{200} \cdot 1 = 205$	$\frac{500}{200} \cdot 10$\ 0 $= 250$	$\frac{600}{200} \cdot 10$\ 0 $= 300$	$\frac{650}{200} \cdot 10$\ 0 $= 325$	$\frac{710}{200} \cdot 10$\ 0 $= 355$

Her ses det f.eks. at elev-udviklingen på skolen er steget med 355 % i 2017 i forhold til basisåret.

Husk at indekstal altid måles i procent.

Forholdet mellem $\dfrac{\textit{Værdien i slutåret}}{\textit{Værdien i startåret}}$ kaldes også for fremskrivningsfaktoren, som vi kender fra alm. procentregning.

Dvs. for 2010 er fremskrivningsfaktoren bestemt til $\dfrac{240.}{200} = 1.200000000$, og så beregningen vi laver minder os om formlen.

$S = B \cdot (1 + r)$ som vi kender fra procentregning. Således vi ganger elev-antallet med fremskrivningsfaktoren.

$S = 1.2 \cdot 200 = 240.$

Hvis man ikke kender tabelværdien i året før, men ikke tabelværdien året efter.

Men hvad hvis vi kender indekstallet med ikke antal elever?

Antag Vi ved at indekstallet er for 2017 er 355 og indekstallet for 2016, men vi kender ikke antal elever i 2017.

Vi kan opstille følgende funktion.

$$elever_{2017} = \frac{I_{2017}}{I_{2016}} \cdot elever_{2016} = \frac{355.}{325} \cdot 650 = 709.9999998$$

Dvs. antal elever i 2017 er bestemt ved vi plot kender indekstallene for startåret og slutåret samt antal elever året før.

Hvis man kender tabelværdien i slutåret, men ikke i startåret.

Lad os sige vi kender antal i 2017, men ikke kender antal elever i 2016.

Fremskrivningsfaktoren er stadig $\frac{355.}{325} = 1.092307692$

For at bestemme antal elever i 2016, så opstilles følgende ligning, som vi kan løses ved hjælp af Maple's solve funktion.

$$solve\left(\frac{355}{325} \cdot elever_{2016} = 710\right) = 650$$

Dvs. antal elever i 2016, som bekendt er 650.

Bestemme ændringen i procent mellem 2 tabelværdier.

Vi kan til slut bestemme ændringen mellem 2 tabel i år i procent.

formlen ændring i procent $= \left(\frac{Slutværdi}{Startværdi} - 1\right) \cdot 100$

Vi kan bestemme ændringen i elever i procent fra 2016 til 2017.

$$\left(\frac{355}{325.} - 1\right) \cdot 100 = 9.230769200$$

Med andre ord antallet af elever på skolen steg med 9.23 % fra 2016 til 2017.

Rente og fremskrivning

Procent betyder pr. 100, og det vil sige at 25 %,50%, 100% kan skrives som hhv.

$\frac{25}{100} = 0.25$, $\frac{50}{100} = 0.5$, $\frac{100}{100} = 1.00$

Disse værdier man bestemmer kaldes ”rentefoden” og er procenten skrevet som et decimaltal.

Denne beregning kan generaliseres ud fra følgende formel.

At bestemme rentefod

Rentefoden r bestemmes ved hjælp af følgende formel.

$$r = \frac{p\%}{100}$$

Hvor p % er procenttallet i heltal.

Når man driver en forretning, så skal der til de varer du sælger tillæg en afgift til staten som hedder moms, og denne er på 25 %. Men hvordan lægges denne til prisen. Til dette anvendes nedenstående metode.

Eksempel (At lægge moms til og trække moms fra)

For at lægge moms til, som er 25%, så øger man den oprindelig pris for varen med 25 %.

Dvs. hvis en vare koster 100 kroner uden moms, så er prisen med moms

$pris_{m.moms} = 100\ kr \cdot \frac{5}{4} = 100\ kr \cdot 1.25 = 125\ kroner$

Man siger at lægger momsen til den oprindelige pris, som er de 100 % og derved lægger 25 % oveni.

Dvs. at prisen med mons er 125 kroner.

Eksempel (At trække moms fra)

For at trække moms på 25 % fra prisen på en vare der koster 125 kroner, så anvendes følgende regnemetode.

$$pris_{u.moms} = 125.0\ kroner \cdot \frac{4}{5} = 125.0\ kroner \cdot 0.8 = 100.0\ \ kroner$$

Dvs. prisen uden moms er 100 kroner.

Men nu spørg den opmærksomme læser, hvorfor skal man gange med $\frac{5}{4}$ når man lægger moms til?

Det er fordi siger at den oprindelig pris svare til de 100 %, og det er den man lægger 25 %. Derfor skal man gang prisen uden moms med 1.25.

Tilsvarende hvorfor skal man gange prisen med $\frac{4}{5} = 0.8$ når man skal trække procent fra?

Antag du har prisen som koster 100 % m. moms. Momsen er som bekendt 25 % fordi

$\frac{100\%}{4} = 25\ \%$ som man lægger til.

Med andre ord, 100 + 25 = 125

Men hvis man skal tilbage til de 100, så skal man trække en $\frac{1}{5}$ fra

$$125 - \frac{125}{5} = 100$$

Derfor skal man trække en femtedel fra når man skal beregne prisen uden moms. Men hvordan beskriver vi begge situationer mere matematisk?

At lægge procent til eller trække procent fra. (Formel)

Antag du har en startkapital B og en slutkapital S, og B tilskrives en rentefod r, så kan dette beskrives.

$$S = B \cdot (1 + r)$$

Værdien $1 + r$ er den værdi hvormed kapitalen fremskrives, idet den det er værdien hvormed det oprindelig kapital B ændres, således at S opnås.

At fremskrive værdier med en fast procent.

Vi regner nu på eksemplet fra tidligere ved at indsætte i formlen ovenfor

$100\ \ kr \cdot (1 + 0.25) = 125\ kroner$ (Vi lægger 25 % moms til)

Tilsvarende kan vi trækker momsen fra igen

$125\ kr \cdot \big(1 + (-0.20)\big) = 125\ kr \cdot 0.8 = 100\ \ kroner.$ (Vi trækker momsen fra igen)

Men hvad hvis en kapital fremskrives med en fast procent over en længere periode?

Fremskrivning af kapital med samme rente.

Antag du har en kapital B fra tidligere som fremskrives med en fast procent, men denne gang over et større antal terminer, men renten er den samme.

Eksempel
Vi tager varen med en pris på 100 kroner fra tidligere og øger den med en fast procent 10 % hvert år over 3 år.

$$S_3 = 100 \cdot (1 + 0.10) \cdot (1 + 0.10) \cdot (1 + 0.10) = 133.1\ kroner$$

Man siger varens pris fremskrives med 10 % pr. termin (år).

Tilskrivning af rente kan også udtrykkes mere generelt.

$S_n = B \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdots (1 + r_n)$, hvor S_n er slutkapitalen, B er startkapitalen og $r_1, r_2, \dots, r_n$ er terminsrenten. Værdien $(1 + r_n)$ er et tal hvormed kapitalen fremskrives.

Tilskrivning af forskellig rente.

Hvis man har en vare til prisen indkøbsprisen B, så kan man bestemme den nye pris efter der er tilskrevet diverse afgifter.

Eksempel

Antag et par sko koster 500 kroner at producere. Der er et importgebyr på 10 %, et distributionsgebyr på 5 % og moms på 25 %. Hvad skal salgsprisen være for skoene?

Løsning: Vi anvender formlen $S = B \cdot (1 + r)$, hvilket giver os følgende udregning.

$500\ kr \cdot (1.10) \cdot (1.05) \cdot (1.25) = 781.7\ kr$ Dvs. den nye salgspris skal være 781.7 kroner.

Tilskrivning af samme rente over et fast antal terminer.

Hvis man fremskriver kapital over et fast antal terminer, kan dette skrives kompakt ud fra en formel, dog med lidt andre betegnelser for slut og startkapital (end vi så tidligere).

Formel (Kapitalfremskrivning)
Givet noget kapital K_0 og en fremskrivningsfaktor $1 + r$, så kan slutkapitalen K_n bestemmes.

$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$, hvor K_0 $ikke\ må\ være\ 0$.

Den formel kaldes *kapitalfremskrivningsformlen.*

Ligesom vi kan fremskrive prisen på en vare med en fast procent, så kan vi også fremskrive andet så som f.eks. befolkningstal i en by med fast procent.

Eksempel.

Thyborøn by har i år 2018 et antal på 2035 personer. Befolkningen forventes efter 2018 at fald med 0.5 % om året. Bestem hvor mange borgere som forventes at bo i byen i år 2025.

Løsning:

Hvis $K_0 = 2035$ og $r = -0.005$ og år 2025 er 7 år efter 2018, så n = 6.

Dette indsættes i kapitalfremskrivningsformlen

$$K_7 = 2035 \cdot (1 + -0.005)^6 = 1974.7$$

Dvs. sige at 7 år efter 2018 (med andre i 2025) vil der være 1974 borgere og dermed 61 færre borgere. Hvis befolkningen hvert år falder med 0.5 % om året.

Men hvad hvis man ønsker at bestemme antal terminer ved hjælp kapitalfremskrivningsformlen? Hvis man kender $K_n, r\ , n$ men ikke r .

Eksempel.

Vi ved at Thyborøn har 1800 indbyggere 16 år efter år 2018, men vi ved ikke hvad det falder i procent om året var.

Løsning.

Vi ved at antal indbyggere i byen var 2035 i 2018 så det er derfor vores K_0.

Vi får følgende ligning $1800 = 2035 \cdot (1 + r)^{15}$

Denne ligning kan løses både uden og med Maple. (Men vi vælger ikke at bruge Maple her)

$$1800 = 2035 \cdot (1 + r)^{15} \Leftrightarrow \frac{1800}{2035} = (1 + r)^{15}$$

(Dette kan omskrives til). $\Rightarrow 0.8845 = (1 + r)^{15}$

(Vi den 15-rod på begge sider af lig med) $\Rightarrow \sqrt[15]{0.8845} = \sqrt[15]{(1 + r)^{15}}$

(Hvilket reduceret giver). $\Rightarrow 0.9918 \quad = 1 + r$

(Hvilket betyder at vi kan finde r ved at trække 1 fra på begge på sider af lig med) $\Rightarrow \ r = 0.9918 - 1 = -0.0082$

Med andre ord, at befolkningen er faldet med 0.82 % om året efter 2018. Således at befolkningstallet 16 år efter 2018 er på 1800 personer.

Gennemsnitsrente og årlig rente.

Ofte er det sådan, at hvis man indsætter penge på opsparingskonto, så er det altid sådan at man får det samme i rente hver år, men hvordan den bestemmes den gennemsnitlige rente pr. år?

Gennemsnits. Rente

Antag der tilskrives følgende renter $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ pr. termin på en kapital, så

$$1 + r_{gns} = \sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdots (1 + r_n)}$$

Hvor r_{gns} kaldes gennemsnitsrentefoden pr. termin.

Eksempel.

Der gives 5 % i rente på en kapital det første år, 2 % det andet år og 3 % det tredje år. Hvad er gennemsnitsrenten?

Løsning.

Vi indsætter i formlen ovenfor $1 + r_{gns} = \sqrt[3]{(1 + 0.05) \cdot (1 + 0.02) \cdot (1 + 0.03)} = 1.03325$

Hvilket betyder at gennemsnitsrentefoden da er $r_{gns} = (1.03525 - 1) = 0.03325$

Således at gennemsnitsrenten fundet ud fra $p\% = r \cdot 100$ så er $p\% = 0.03325 \cdot 100 = 3.325\ \%$. Med andre ord, så er renten i gennemsnit 3.3 %.

Hvis man ønsker at bestemme den årlige, hvis den måned rente kendes, så kan dette gøres ved hjælp følgende formlen.

Formel (Årlig rente)

Antag at den årlige rentefod er defineret som $r_{årlig}$ og den månedlige rente er $r_{måned}$, så kan årsrentefoden ud regnes ud fra formlen

$$1 + r_{årlig} = (1 + r_{måned})^{12}$$

Anvendelse af denne formel gennemgås i nedenstående eksempel.

Eksempel:

Antag et lån koster 2.5 % i rente om pr. måned. Hvad koster lånet årligt?

Løsning:

Vi indsætter i formlen ovenfor $1 + r_{årlig} = (1 + 0.025)^{12} = 0.3448$

Lånets prisen i procent kan dernæst bestemmes $p\% = 0.3448 \cdot 100 = 34.48$ %

Dvs. lånet koster 34.48 % om året når månedsprisen i procent er 2.5 % pr. måned.

Trekantsberegning.

Vi vil i det følgende beskæftige os med beregninger på trekanter.

Defintion 1(Trekant)
En trekant er en geometrisk konstruktion bestående af 3 sider og 3 vinkler.
Vinkler betegnes med store − bogstaver (Eks. A,B,C...). *Sider betegnes med små bogstaver*(Eks. a,b,c,...). *En vinkel har altid en tilhørende side med samme navn. Dvs.* vinkel A *har den tilhørende* side a osv.

Summen af trekantens vinkler er ***altid*** *180 grader.*

I matematikken møder vi flere typer af trekanter, hvor en af disse er den retvinklede trekant.

Definition 1.1 (Retvinklet trekant)
En retvinklet trekant er en trekant med én vinkel på 90 grader.
De korteste sider i en retvinklet trekant kaldes kateter *og den længste side benævnes* hypotenusen.

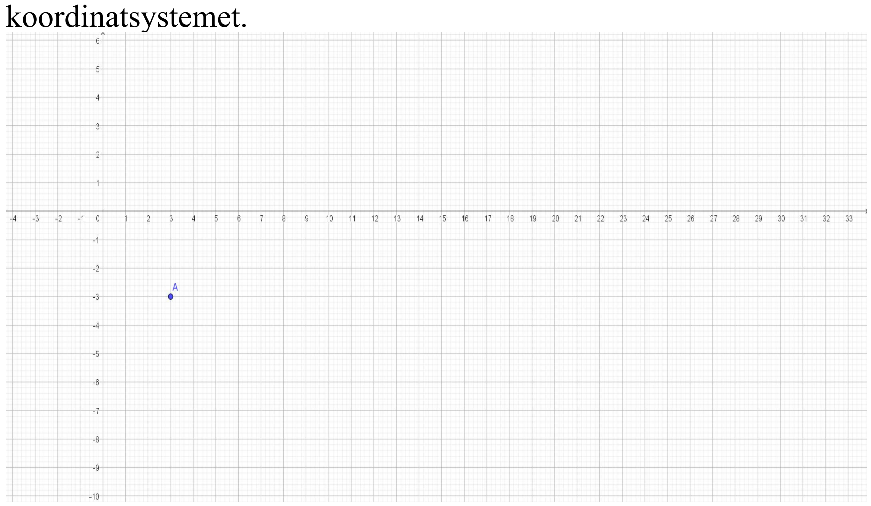
En trekant kan tegnes i fri-hånd, men for at opnå størst nøjagtighed anvendes konstruktionsværktøjet Geogebra.

Eksempel 1

Tegn den retvinklede-trekant ABC i Geogebra, hvor siden $a = 3$, siden $b = 4$ og hypotenusen c = 5.

Løsning Eksempel 1

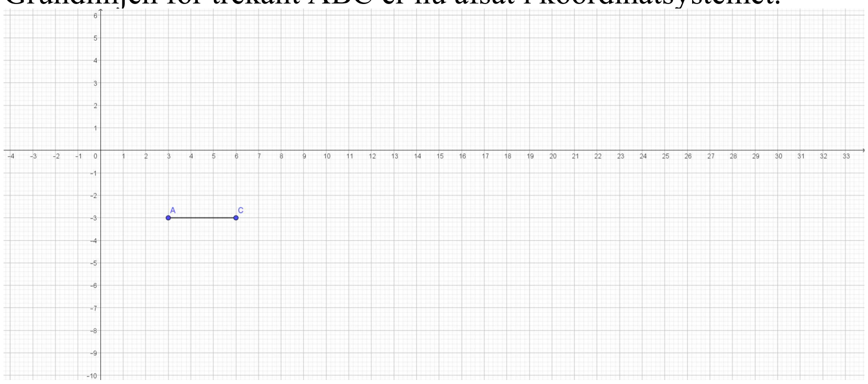
Først åbnes programmet Geogebra og der afsættes et punkt A i koordinatsystemet.



Vi vælger at trekantens grundlinje er linjen AC = b, og punktet C afsættes i afstanden 3 fra A. Samt at der tegnes en linje imellem A og C. Dette er *grundlinjen* b for trekant ABC.

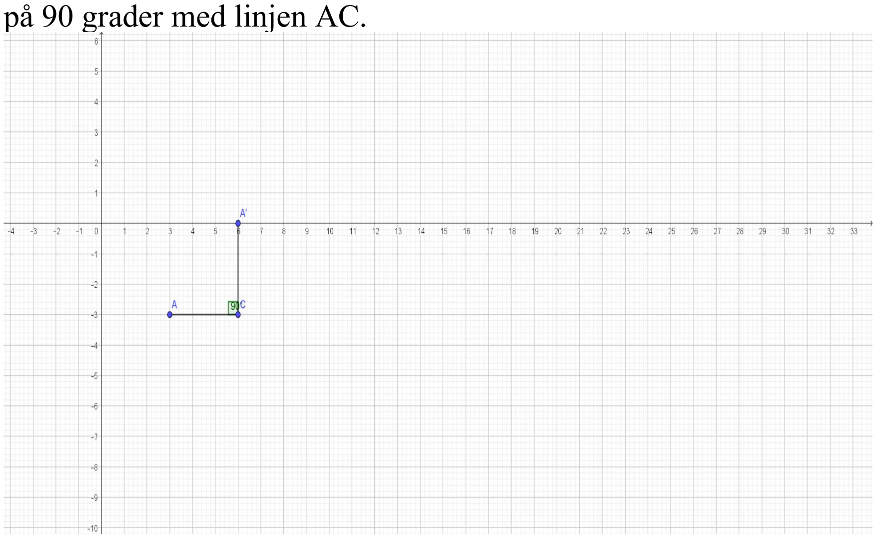
Løsning Eksempel 1 fortsat.

Grundlinjen for trekant ABC er nu afsat i koordinatsystemet.



Idet vi ved at vinkel C skal være 90 grader kan denne afsættes ved hjælp af vinkelmenu-punktet i værktøjslinjen i Geogebra.

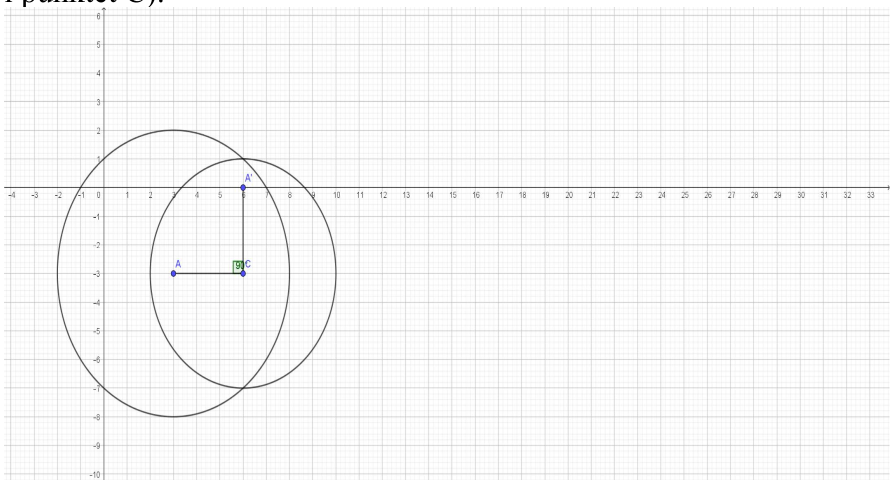
Trekanten med vinkel C afsat. Bemærk vinkel C danner en virkel på 90 grader med linjen AC.



Vi mangler nu at afsætte kateten CB = a og hypotenusen AB = c.

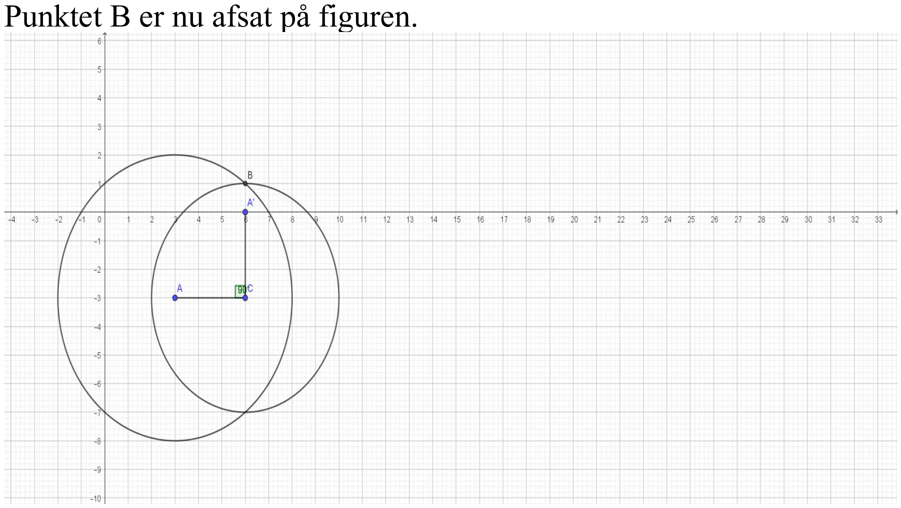
Løsning Eksempel 1 fortsat.

Vi afsætter en cirkel med radius 5 (svarende hypotenusen længe) punktet A. Samt en cirkel med radius 4 (svarende til katentens lægde i punktet C).



For at afsætte disse afstande nøjagtigt, så findes skæringen mellem de 2 cirkler vha. skæringsværktøjet i Geogebra.

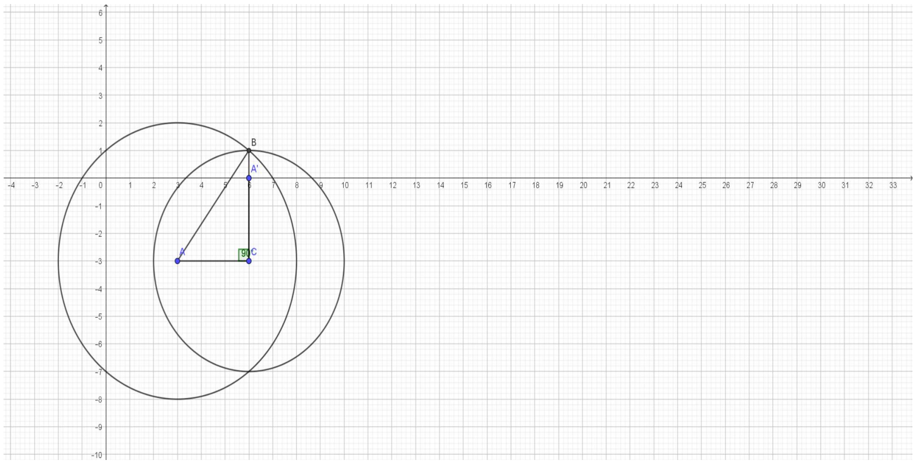
Punktet B er nu afsat på figuren.



Herefter afsætter hypotenusen AB = c = 5 og kateten CB = a = 4.

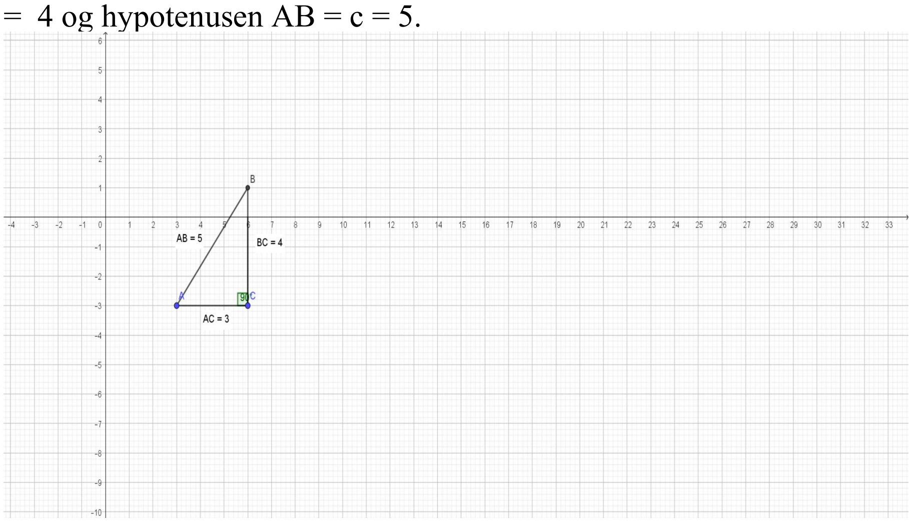
Løsning Eksempel 1 fortsat

Trekant ABC begynder nu at tage form, idet hypotenusen AB og kateten CB er afsat.



Til slut fjernes hjælpecirklerne og hjælpepunkt A', og trekant ABC er nu konstrueret med de korrekte mål.

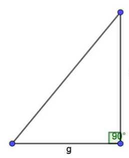
ABC konstrueret i Geogebra med kateten AC = b =3, kateten CB = a = 4 og hypotenusen AB = c = 5.



Alternativt kan dette gøres med passer og linjen og dette vises i en interaktiv guide på Engelsk via dette link.
https://www.mathopenref.com/consttrianglesss.html

Arealet af en trekant benævnt A (eller T i visse bøger) er defineret som $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

Arealet af trekant, hvor grundlinjen er benævnt g og højden benævnt. Bemærk højden står vinkelret på g.



Eksempel 1.1

Antag du har givet en trekant ABC hvor g = 4 og h = 6. Bestem arealet af trekant ABC.

Løsning Eksempel 1.1

Der er indsættes i arealformlen ovenfor hvilket giver $Areal = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

Dvs. at arealet af trekant ABC, Areal = 12.

Når man regner med retvinklede trekanter, så en af de vigtigste sætninger Pythagoras-sætning.

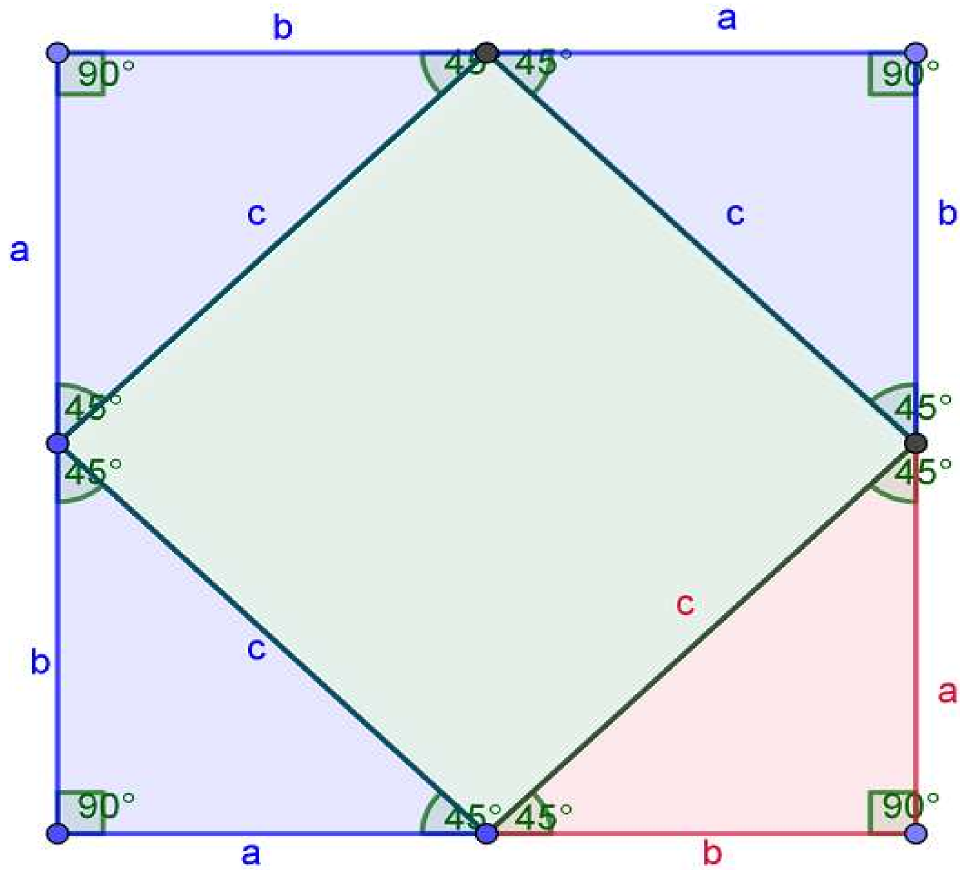
Sætning 1(Pythagoras-sætning)

Antag du har givet en retviklet trekant ABC. Siden a kaldes en katete og siden b kaldes en katete, og den længste side C kaldes hypotenusen.

Så gælder det $a^2 + b^2 = c^2$

Bevis

a) Antag du har givet en retvinklet trekant ABC med kateterne *a* og *b* og hypotenusen *c* (trekanten markeret med rødt). Der tegnes 3 yderligere trekanter med samme vinkler og sidelængder som den første (disse markeret med blåt). Herved fremkommer nedenstående figur.



b) Der er nu dannet to kvadrater *et lille* og *et stort.* Vi kan bestemme arealet af det store kvadrat, idet udfra ovenstående tegning ses at arealet er

$A_{storekvadrat} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + b^2 + a\cdot b + a\cdot b = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$ (jvf. første kvadratsætning)

Det store kvadrat består af 4 trekanter som hver har arealet $A_{trekant} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot g = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b$

Derfor kan vi skrive $A_{trekanter} = 4 \cdot A_{trekant} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b$

Bevis fortsat.
Samt et lille kvadrat (markeret med grønt) som har arealet $A_{lillekvadrat} = c \cdot c = c^2$

c) Vi kan nu skrive $A_{storekvadrat} = A_{lillekvadrat} + A_{trekanter.}$

Hvilket betyder, at $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b + c^2$

d) Dette udtryk kan nu reduceres ved at trække $2 \cdot a \cdot b$ fra på begge sider af ligmed.

Med andre ord, $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b = c^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b$

Så vi nu kan skrive til slut $a^2 + b^2 = c^2$ og hermed er sætningen bevist.

Når man arbejder med trekanter, så kan man stå i en situation, hvor man præsenteres for 2 trekanter hvor disse har samme vinkler. Men hvor siderne i trekanterne har forskellige mål. Sådanne trekanter kaldes *ensvinklede trekanter*. Disse vil blive behandlet i det efterfølgende afsnit.

Definition (Ensviklede trekanter)

2 trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ *siges at være ensviklede, hvis vinklerne er parvis ens. Med andre ord.* $A = A_1$, $B = B_1$ og $C = C_1$

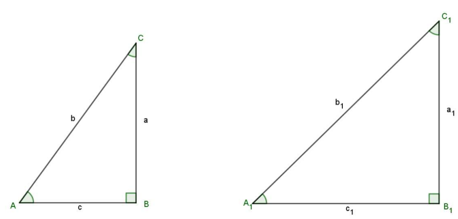
For at kunne regne på siderne i ensvinklede trekanter indføres størrelsen *Skalafaktor*, som behandles nedenfor.

Definition (Skalafaktor)

Antag du har givet 2 ensviklede trekanter ABC og *$A_1B_1C_1$ som dem nedenfor. Forholdet mellem 2 tilsvarende sider i trekaterne kaldes* Skalafaktoren *og betegnes* **k.** Denne har formlen

$$\boldsymbol{k} = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

(Husk! Ensviklede trekanter ***ikke*** nødvendigvis retvinklede).



At lave beregninger på ensvinklede trekanter med skalafaktoren.

For at kunne regne hvor skalafaktoren opstilles følgende tabel, hvori de forskellige tilfælde med skalafaktoren beskrives.

Hvad kendes og hvad ønskes fundet.	**Hvad bruges, (hvis man skal gå fra lille til stor trekant)**
kendes s.f og a i den lille trekant, og a_1 i den store trekant ønskes fundet.	Så anvendes $a_1 = k \cdot a$ (dvs. siden a ganges med skalafaktoren)
kendes s.f og b i den lille trekant, og b_1 i den store trekant ønskes fundet.	Så anvendes $b_1 = k \cdot b$ (dvs. siden b ganges med skalafaktoren)
kendes s.f. og c i den lille trekant, og c_1 i den store trekant ønskes fundet.	Så anvendes $c_1 = k \cdot c$ (dvs. siden c ganges med skalafaktoren)
Hvad kendes og hvad ønskes fundet.	**Hvad bruges, (hvis man skal gå fra stor til lille trekant)**
kendes s.f og a_1 i den store trekant, og a i den lille trekant ønskes fundet.	Så anvendes $a = \frac{a_1}{k}$ (dvs. siden a_1 divideres med skalafaktoren).
kendes s.f og b_1 i den store trekant, og b i den lille trekant ønskes fundet.	Så anvendes $b = \frac{b_1}{k}$ (dvs. siden b_1 divideres med skalafaktoren).
kendes s.f og c_1 i den store trekant, og c i den lille trekant ønskes fundet.	Så anvendes $c = \frac{c_1}{k}$ (dvs. siden c_1 divideres med skalafaktoren).

En anden vigtig type af beregninger med trekanter er at bestemme sider og vinkler vha. de såkaldte trigonometriske funktioner. Dette behandles i det efterfølgende afsnit.

Enhedscirklen og trigonometriske funktioner

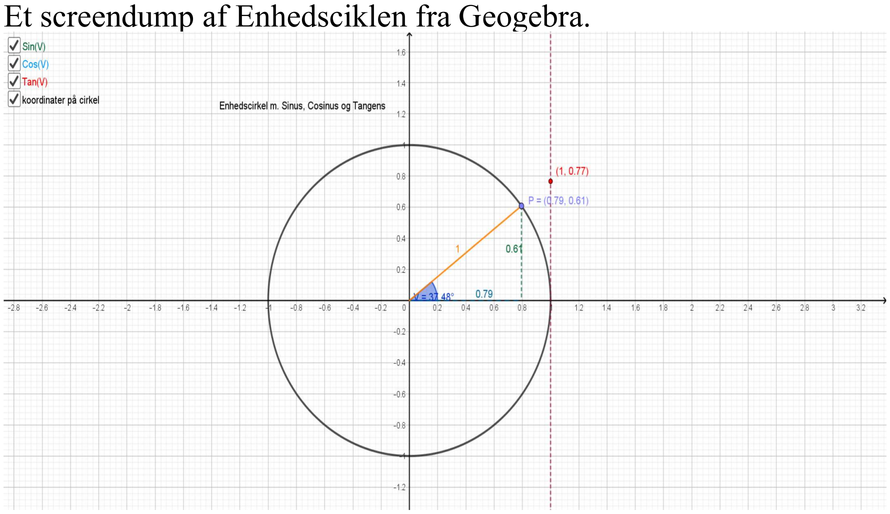
Når man skal lave beregninger på vinkler og sider i trekanter, så indføre vi de såkaldte *trigonometriske funktioner*. Disse funktioner hedder Sinus, Cosinus og Tangens og er defineres ved hjælp af en cirkel med radius på 1 kaldet ***Enhedscirklen***.

Definition Enhedscirkel.

En cirkel med radius r = 1 kaldes en Enhedscirkel.

På cirklen placeres et punkt P, der har x-koordinaten Cos(V) og y-koordinaten Sin(V). Dvs. $P(Cos(V), Sin(V))$. Punktet P bevæger sig mod urets retning fra P(1,0) på cirklen og hele vejen rundt. Tangens til V aflæses som afstanden fra x-aksen til den værdi på y-aksen, svarende til det røde punkt y-koordinat på tegningen. Til begynde med hvis P er placeret i P(1,0), så svare det til at V er 0 grader, og når P har opnået værdien P(0,1) er V 90 grader. Når P har værdien P(-1,0), så er V 180 grader, og hvis P (0,-1), så har V opnået en størrelse på 270 grader. Een hel tur rundt langs cirklen betyder at du bevæget dig i 360 grader. Test eventuelt den interaktive Enhedscirkel i kursusmappen.

Et screendump af Enhedsciklen fra Geogebra.



Vi vil nu bestemme Sinus, Cosinus og Tangens til forskellige vinkler, som ses i tabellen på næste side.

V (i grader)	30 grader	60 grader	90 grader	180 grader	270 grader	360 grader
$Sin(V)$	$Sin(30) =$ 0.500000000\ 0	$Sin(60) =$ 0.86602540\ 40	$Sin(90) =$ 1.	$Sin(180) = 0.$	$Sin(270) =$ $-1.$	$Cos(360)$ $= 1.$
$Cos(V)$	$Cos(30) =$ 0.866025404\ 0	$Cos(60) =$ 0.50000000\ 00	$Cos(90) =$ 0.	$Cos(180) =$ $-1.$	$Cos(270) =$ 0.	$Cos(360)$ $= 1.$
$Tan(V)$	$Tan(30) =$ 0.577350269\ 3	$Tan(60) =$ 1.73205080\ 8	$Tan($ 90) Error, (in tan) numeric exception: division by zero	$Tan(180) = 0.$	$Tan($ 270) Error, (in tan) numeric exception: division by zero	$Tan(360)$ $= 0.$

Hvis man kender f.eks. at $Cos(V) = 0.79$ og ønsker at bestemme V, så anvendes den modsatte (inverse) trigometriske funktion for Cosinus, $Cos^{-1}(V)$. Denne kaldes frem i Maple ved hjælp af Gym-pakken, og har betegnelsen *invCos*.

Således $invCos(0.79) = 37.81448851$ Dvs. at den vinkel som "svare til" hvis Cos(V) = 0.79, er cirka 37.8 grader.

Hvis man kender f.eks. at $Sin(V) = 0.61$ og ønsker at bestemme V, så anvendes den modsatte (inverse) trigometriske funktion for Sinus, $Sin^{-1}(V)$. Denne kaldes frem i Maple ved hjælp af Gym-pakken, og har betegnelsen *invSin.*

Således $invSin(0.61) = 37.58950296$ Dvs. at den vinkel som "svare til" hvis Sin(V) = 0.61, er cirka 37.6 grader.

Afvigelsen skyldes, at der i Geogebra sker en mindre forkortelse af antallet af decimaler ved punktet P. Dette kan vi kan med forbehold tjekke $Cos(37.48) = 0.7935657896$ og $Sin(37.48) = 0.6084844596$ og dermed har vi ved hjælp af Enhedscirklen og Geogebra fundet hvilken værdi, som svare til de på enhedscirklen aflæste værdier.

Tilsvarende kan Tangens til bestemmes $Tan(V) = 0.77$ ved $Tan^{-1}(V)$. Med andre ord $invTan(0.77) =$ 37.59627114

Vi tjekker resultatet ved hjælp af Maple $Tan(37.48) = 0.7667725443$ og kan herefter konkludere, at vi har fundet den vinkel som betyder $Tan(V) = 0.77$.

NB! Bemærk, at Tan(90) og Tan(270) giver en fejl i Maple. Hvorfor dette sker er en konsekvens af **Sætning 1.1,** og denne behandles på næste side. Samt at tilfældet Tan(90) og Tan(270) gennemgåes efter beviset for **Sætning 1.1**.

Sætning 1.1 (Sinus, Cosinus og Tangens for retvinklede trekanter)
I en trekant som er retvinkel gælder følgende følgende.

1. Sinus til en vinkel V som under 90 grader er lig den modstående katete divideret med trekantens hypotenuse.

$$Sin(V) = \frac{a}{c} = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$$

2. Cosinus til en vinkel V som er under 90 grader er lig den hosliggende katete divderet med hypotenusen.

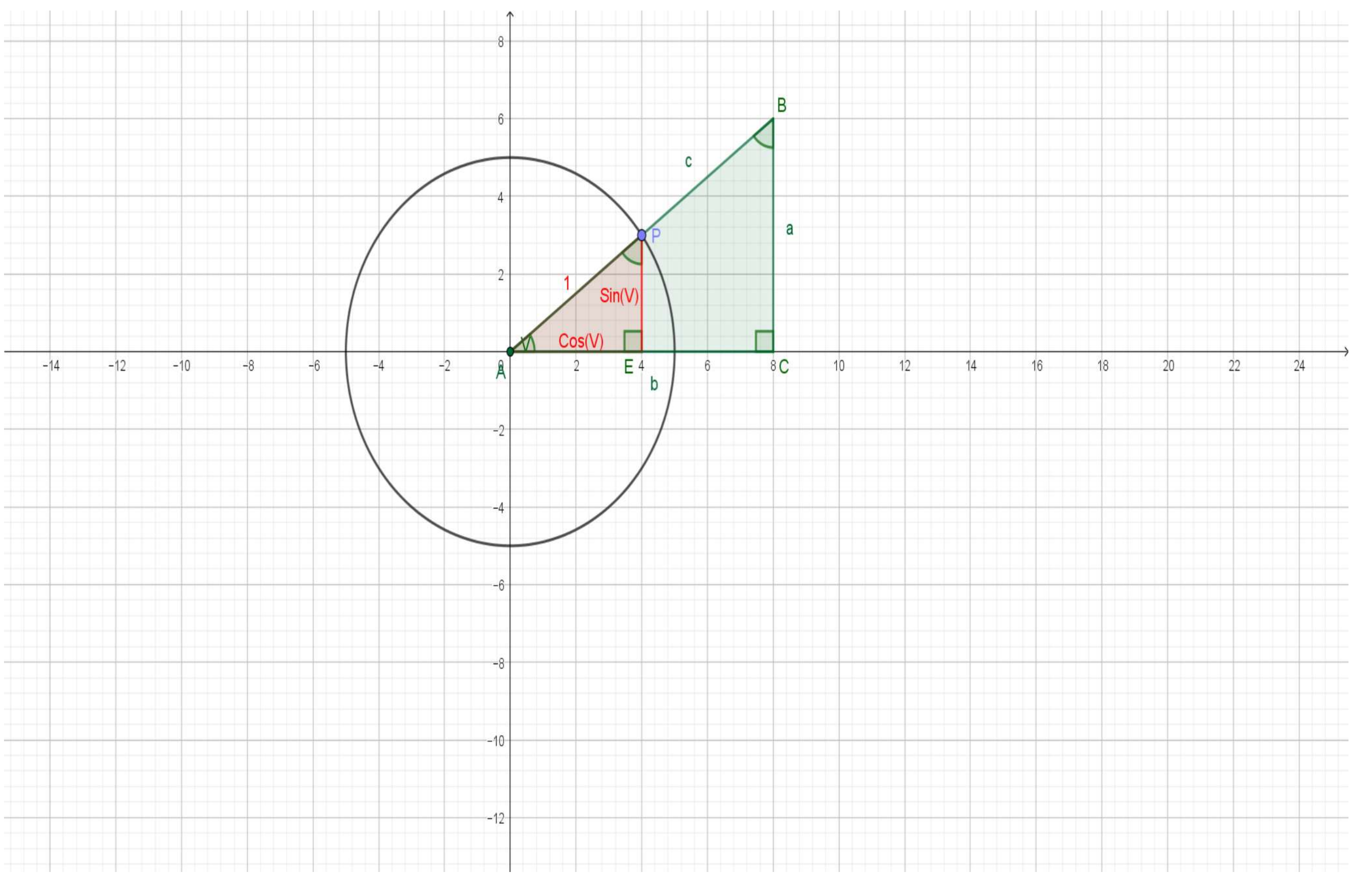
$$Cos(V) = \frac{b}{c} = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

3. Tangens til en Vinkel V, som er under 90 grader er lig den modstående katete divideret med den hosliggende.

$$Tan(V) = \frac{a}{b} = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

Bevis for **Sætning 1.1**

Først indsætter vi en retvinklet trekant APE inde i cirklen (markeret med rødt). Derfornæst forlænger vi denne trekant, så vi får en ny retvinklet trekant ABC. Disse trekanter antages at være ensvinklede.



Bevis for **Sætning 1.1** fortsat.

Da trekanterne APE og ABC er ensvinklede, så kan vi derfor beregne skalafaktoren ***k*** mellem 2 kendte sider, hypotenusen i trekant ABC og hypotenusen i trekant APE.

Med andre ord: $k = \frac{c}{1} = c$ (Se formelsamlingen side 8 for formlerne for beregning med skalafaktor i ensvinklede trekanter eller definitionen ovenfor.)

For at bestemme kateten b i trekant ABC, så anvendes at $b = k \cdot Cos(V)$ således $b = c \cdot Cos(V)$

Til sidste kan vi med fordel dividere udtrykket med c på begge sider af ligmed

$\frac{b}{\mathbf{c}} = c \cdot \frac{Cos(V)}{c}$ så der hermed opnåes $Cos(V) = \frac{b}{c}$

For at bestemme kateten a i trekant ABC, så anvendes at $a = k \cdot Sin(V)$ således $a = c \cdot Sin(V)$

Til sidste kan vi med fordel dividere udtrykket med c på begge sider af ligmed

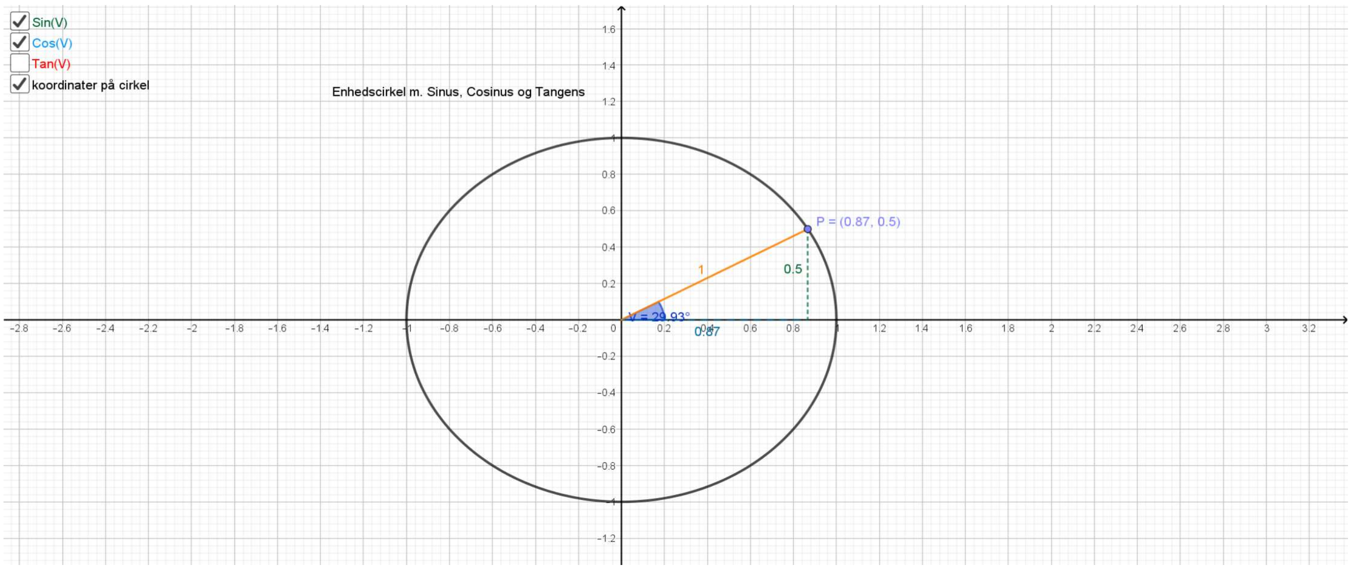
$\frac{a}{\mathbf{c}} = c \cdot \frac{Sin(V)}{c}$ så der hermed opnåes $Sin(V) = \frac{a}{c}$

Tangens er defineret som $Tan(V) = \frac{Sin(V)}{Cos(V)} = \frac{\frac{a}{c}}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$

Hermed er **Sætning 1.1** bevist.

Sinus, Cosinus og Tangens generelt for retvinklede trekanter.

Tidligere så vi i **Sætning 1.1**, hvordan Sinus, Cosinus og Tangens til en vinkel V (på under 90 grader) i retvinklet trekant er defineret. I nedenstående tegning ses en grafisk repræsentation af dette.



Sinus til en given vinkel V er defineret som $Sin(V) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$

hvor den modstående katete er den side (markeret med grønt ovenfor), som står overfor den oplyste eller søgte vinkel.

Cosinus til en given vinkel V er defineret som $Cos(V) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$

hvor den modstående katete er den side (markeret med med blåt ovenfor), er grundlinjen i trekanten i forhold til den søgte eller oplyste vinkel.

Tangens til en given vinkel V er defineret som $Tan(V) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$

Med andre ord, den side markeret med grønt divideret med den side markeret med blåt.

Tilfældet Tangens

I tabellen ovenfor sås, at $Tan(90)$ (dvs. Tangens til 90 grader) og $Tan(270)$ (dvs. Tangens til 270 grader) ikke kunne bestemmes, men hvorfor er det sådan?

Fra **Sætning 1.1** ved vi, at $Tan(V) = \dfrac{Sin(V)}{Cos(V)}$ eller $Tan(V) = \dfrac{modstående\ katete}{hosliggende.}$

I Tabellen ovenfor ved Vi, at $Sin(90) = 1$ og $Cos(90) = 0$, hvis Vi indsætter dette i definitionen for Tangens fås.

$Tan(90) = \dfrac{Sin(90)}{Cos(90)} = \dfrac{1}{0}$ og da man ikke kan dele med nul, så er Tan(90) hermed ikke defineret.

Tilsvarende for gælder det for Tan(270), at

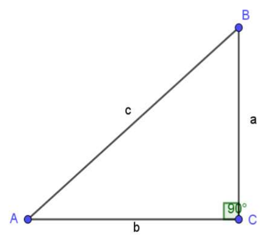
$Tan(270) = \dfrac{Sin(270)}{Cos(270)} = \dfrac{1}{0}$ med den konsevens, at Tan(270) heller ikke er defineret.

Vi vil på de følgende sider regne en række eksempler på retvinklede trekanter, hvor de ovenfor definerede trigonometriske funktioner anvendes til at bestemme vinkler og sider.

Eksempler på anvendelse at Sin, Cos og Tangens i trekantsberegning.

Eksempel 1.2 (Cosinus)

Antag der er givet en trekant ABC, hvor vinkel C er ret. Det oplyses desuden at kateten b = 4 og hypetenusen c = 6. Bestem vinkel A og siden a.



Løsning til Eksempel 1.2.
siden b er den hosliggende katete i forhold til vinkel A og og da vi har hypotenusen c angivet, så anvender det vi kender for Cosinus til at bestemme vinkel A, med andre ord.

$$Cos(A) = \frac{hos}{hyp} = \frac{4}{6}$$

Efterfølgende har vi nu en ligning som vi kan løse ved hjælp af Maple eller en lommeregner.

$$Cos(A) = \frac{4}{6} \xrightarrow{\text{solve for A}} [[A = 48.18968510]]$$

Det vil sige vinkel A i trekanten ABC er 48.19 grader.

Alternativet kan A findes ved at anvende *invCos* fra Maple eller $Cos^{-1}(V)$ på lommeregner.

$$A = invCos\left(\frac{4}{6}\right) = A = 48.18968510$$

Herved fås igen, at vinkel A = 48.19 grader.

Eller vi kan bruge Maple's indbyggende solve-funktion, (se afsnittet i Maple manualen)

$$solve\left(Cos(A) = \frac{4}{6}, A\right) = 48.18968510$$

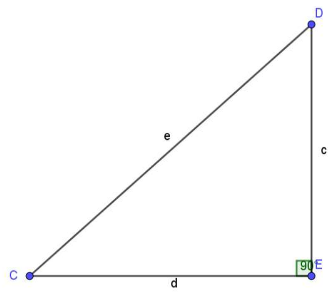
Hermed ses, at Vi igen får at vinkel A er ligmed 48.19 grader.

Siden a kan vi anvende Pythagoras til at bestemme $a^2 + b^2 = c^2$ og det betyder i vores tilfælde
$a^2 + 4^2 = 6^2 \rightarrow a^2 + 4^2 - 4^2 = 6^2 - 4^2 \rightarrow a^2 = 36 - 16 \rightarrow a^2 = 20 \rightarrow a = \sqrt{20} = 4.47$

Således at $a = 4.47$

Eksempel 1.3 (Sinus)

Antag der er givet en retvinklet trekant CDE, hvor vinkel E er ret. Det oplyses desuden at siden d = 8, hypotenusen er e =12. Bestem vinkel D og siden c.



Løsning Eksempel 1.3

Idet siden er den modstående katete til vinkel D og vi har angivet hypotenusen. Så kan vi anvende Sinus til at bestemme vinkel D.

Med andre ord og dette medføre $Sin(\mathrm{D}) = \frac{8}{12} \xrightarrow{\text{solve for D}} [[\mathrm{D} = 41.81031490]]$

Så vinkel D = 41.8 grader.

Dette kan også findes ved at anvende *invSin* funktionen i Maple, så $invSin\left(\frac{8}{12}\right) = 41.81031490$

Således vinkel D er fundet til 41.8 grader.

Slutteligt kan vi også finde vinkel D ved at anvende solve på udtrykket $solve\left(Sin(\mathrm{D}) = \frac{8}{12}, \mathrm{D}\right) =$
41.81031490

Herved fås igen, at vinkel D er lig 41.8 grader.

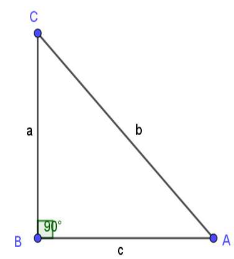
Vi kan efterfølgende bestemme siden c ved hjælp af Pythagoras sætning $a^2 + b^2 = c^2$. Med andre ord i vores tilfælde $c^2 + d^2 = e^2$

$$c^2+8^2=12^2 \rightarrow c^2+8^2-8^2=12^2-8^2 \rightarrow c^2=144-64=80 \rightarrow c^2=80 \rightarrow c=\sqrt{80}=8.94$$

Dvs. sige siden $c = 8.94$

Eksempel 1.4(Tangens)

Antag der er givet trekanten ABC, hvor vinkel B er ret og siden c = 5 og siden a = 8. Bestem vinkel A og siden b.



Løsning Eksempel 1.4

Idet siden a er den modstående katete i forhold til vinkel A og siden c er hosliggende katete iht. vinkel. Så anvender Vi Tangens til at bestemme vinkel A.

$Tan(A) = \frac{a}{c} = \frac{8}{5}$ således, at $Tan(A) = \frac{8}{5} \xrightarrow{\text{solve for A}} [[A = 57.99461679]]$

Det vil sige vinkel A i trekant ABC er cirka 58 grader.

Tilsvarende kan vi bestemme vinkel A ved $invTan\left(\frac{8}{5}\right) = 57.99461675$

Således at vi igen får at vinkel A er cirka 58 grader.

Endelig kan vinkel A findes vha. ligningsløseren solve, $solve\left(Tan(A) = \frac{8}{5}, A\right) = 57.99461679$

Således vinkel A også her er 58 grader.

For at bestemme siden manglende side hypotenusen b, så kan vi anvende Pythagoras eller Sinus eller Cosinus.

Eksempel 1.4 fortsat

Med anvendelse af Cosinus $solve\left(Cos(57.99461679) = \frac{5}{b}, b\right) = 9.433981141$ eller

$Cos(57.99461679) = \frac{5}{b} \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b = 9.433981141]]$

Med anvendelse af Sinus $solve\left(Sin(57.99461679) = \frac{8}{b}, b\right) = 9.433981129$ eller

$Sin(57.99461679) = \frac{8}{b} \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b = 9.433981129]]$

Ved anvendelse af Pythagoras som i vores tilfælde skrives

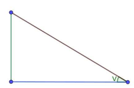
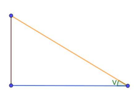
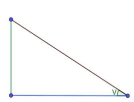
$a^2 + c^2 = b^2 \rightarrow 8^2 + 5^2 = b^2 \rightarrow b^2 = 89 \rightarrow b = \sqrt{89} \rightarrow b = 9.433981132$

Det vil sige at uanset om vi anvender Sinus, Cosinus eller Pythagoras, så fås at siden b = 9.43.

Efter at have gennemført beregninger med Sinus, Cosinus, Tangens på retvinklede trekanter, så er det nu muligt at generalisere dette i et skema på næste side.

Generelt om trekantsberegning med Sinus, Cosinus og Tangens.

Følgende gælder når man regner med trigonometriske funktioner og retvinklede trekanter.

Hvad kendes og hvad ønskes fundet?	Hvilket funktion/metode skal bruges ?
Hvis modstående katete og hypotenusen kendes, og vinkel V ønskes fundet. 	Så anvendes $Sin(V) = \dfrac{modstående\ katete}{hypotenusen}$
Hvis hosliggende katete og hypotenusen kendes, og vinkel V ønskes fundet. 	Så anvendes $Cos(V) = \dfrac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$
Hvis modstående katete og hosliggende katete kendes, og vinkel V ønskes fundet. 	Så anvendes $Tan(V) = \dfrac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$
Hvis vinkel V og hypotenusen kendes, og modstående katete ønskes fundet.	Så anvendes $modstående\ katete = Sin(V) \cdot hypotenusen$
Hvis vinkel V og hypotenusen kendes, hosliggende katete ønskes fundet.	Så anvendes hosliggende katete $=$ $Cos(V) \cdot hypotenusen$
Hvis vinkel V og hosliggende katete kendes og modstående katete ønskes fundet.	Så anvendes $modstående\ katete = Tan(V) \cdot hosliggende\ katete$

At regne med Sinus, Cosinus og Tangens fortsat.

Hvad kendes og hvad ønskes fundet?	Hvad anvendes?
Hvis vinkel V kendes og modstående katete kendes og hypotenusen ønskes fundet.	Så anvendes $hypotenusen = \frac{modstående\ katete}{Sin(V)}$
Hvis vinkel V kendes og hosliggende katete kendes og hypotenusen ønskes fundet.	Så anvendes $hypotenusen = \frac{hosliggende\ katete}{Cos(V)}$
Hvis vinkel V kendes og modstående katete kendes, og hosliggende katete ønskes fundet.	Så anvendes $hosliggende\ katete = \frac{modstående\ katete}{Tan(V)}$

Vi vil på de efterfølgende sider, se på tilhørende defintioner og sætninger i relation til anvendelse af de trigonometriske funktioner til beregninger på vilkårlige trekanter.

Indenfor matematikken arbejder vi med forskellige typer af trekanter. En generel betegnelse for disse er vilkårlige trekanter.

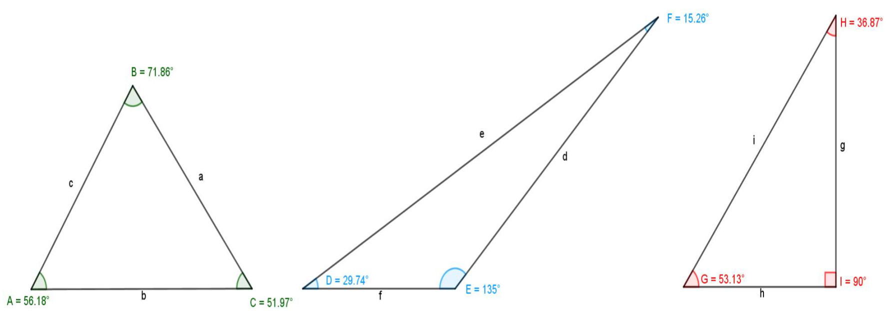
Definition vilkårlig trekant

En vilkår trekant er en trekant som efterlever definition for en trekant oven. Men hvor én af vinklerne ikke nødvendigvis er 90 grader.

Nedenfor ses et eksempler på vilkår trekant.

Eksempel 1.5(vilkårlig trekant)

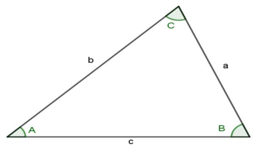
3 forskellige trekanter.



For at kunne udføre udregninger på vilkårlige trekanter, så er det ikke længere muligt, at anvende definitionerne for Sinus og Cosinus fra tidligere. Idet disse kun kan bruges på retvinklede trekanter. Derfor indføres trekantsrelationerne for Sinus, Cosinus.

Trekantsrelationer for vilkårlige trekanter.

Antag du at du har givet en trekant som afbilledet nedenfor, hvor siderne a, b kendes og vinkel C. Du ønsker at bestemme siden c i trekanten, men ingen af vinklerne er tydeligvis 90 grader.



Derfor indføres en ny formel kaldet den udvidet Pythagoras, men også mest kendt som *Cosinus-relationen*.

Den og dens søskende omtales i tabellen nedenfor.

Hvad kendes og hvad ønskes fundet?	Hvilken formel anvendes?
Hvis siderne a, b kendes og vinkel C kendes og siden c ønskes fundet.	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot Cos(C)$
Hvis siderne b,c kendes og vinkel A kendes og siden a ønskes fundet.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot Cos(A)$
Hvis siderne a,c kendes og vinkel B kendes og siden b ønskes fundet.	$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot Cos(B)$
Hvis siderne a,b,c kendes og vinkel C ønskes fundet.	$Cos(C) = \dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2 \cdot a \cdot b}$
Hvis siderne a,b,c kendes og vinkel B ønskes fundet.	$Cos(B) = \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2 \cdot b \cdot c}$
Hvis siderne a,b,c kendes og vinkel A ønskes fundet.	$Cos(A) = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2 \cdot b \cdot c}$

Bemærk venligst, at de 3 sidste tilfælde i tabellen blot er omskrivninger af de varianter af Cosinus-relationen markeret med hhv. blå, rød og orange.

Vi vil på den følgende side formulere Cosinus-relationen (den markeret med blåt) i en sætning.

Cosinus-relationen udtrykkes nedenfor i en sætning.

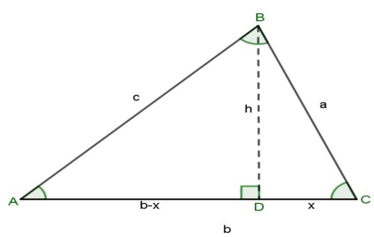
Sætning 1.2 (Cosinus-relationen)

Antag at du har givet en vilkårlig trekant ABC, så gælder følgende.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot Cos(C)$

Bevis for **Sætning 1.2**.

1) Først tegnes en vilkårlig trekant, og denne deles op i retvinklede trekanter ABD og BCD.



2) Hypotenusen c i trekant ABD og BCD udtrykkes ved hjælp af Pythagoras hhv. $c^2 = h^2 + (b-x)^2$ og $a^2 = x^2 + h^2$

3) Idet højderne h er den samme i begge trekanter, så trækkes udtrykkene for hypotenuserne fra hinanden.

$c^2 - a^2 = h^2 + (b-x)^2 - (x^2 + h^2) \rightarrow c^2 - a^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x - x^2 - h^2$

4) Udtrykket fra 3) kan nu reduceres. $c^2 - a^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x - x^2 - h^2 \rightarrow c^2 - a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x$

5) Idet ønsker at udtrykke Cosinus-relationen udfra c, så lægges a^2 til på begge sider.

$c^2 - a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x \rightarrow c^2 - a^2 + a^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x$

6) Vi mangler at kunne udtrykke vinkel C, og idet trekant BCD er retvinkel, så kan vi opstille følgende $Cos(C) = \dfrac{x}{a} \rightarrow x = Cos(C) \cdot a$

Bevis for **Sætning** 1.2 fortsat

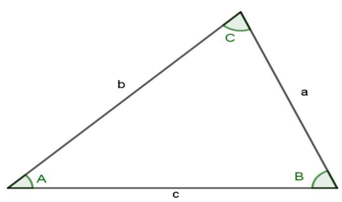
Dette indsættes i udtrykket ovenfor, så vi nu har
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot (Cos(C) \cdot a) \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot Cos(C)$

Hermed er sætningen bevist.

De 2 søskende Cosinus-relationer kan vises på en tilsvarende, men disse udlades her.

Eksempel 1.6 (Cosinus-relationen)

Antag at du har givet en trekant, som nedenstående tegningen er en skitse af. Du får endvidere oplyst, at siden a = 3, b = 5 og Vinkel C = 45 grader.
Bestem siden c og vinkel B ved hjælp af Cosinus-relationen.



Løsning Eksempel 1.6

Først indsættes det kendte i Cosinus-relationen. $c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot Cos(45) = 12.78679657$

Dernæst løses denne ved hjælp af Maples ligningsløser, $solve\left(c^2 = 12.7867957, c\right) =$
$3.575862931, -3.575862931$

Idet en side ej kan være negativ, så er siden c = 3.575862931 = 3.576

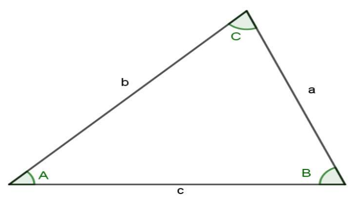
Vi kan finde vinkel B ved at indsætte i den anden Cosinus relation
$solve\left(5^2 = 3^2 + 3.575862931^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3.575862931 \cdot Cos(B), B\right) = 98.61322618$

Dvs. vinkel B = 98.6 grader.

Har givet en vilkår trekant ABC, hvor mindst én side og én vinkel er parvis kendt. Dvs. f.eks. vinkel A og side a er kendte. Hvis i denne forbindelse har oplyst en yderligere vinkel og side, og skal finde den tilhørende side eller vinkel til disse. Så anvendes en anden relation for vilkårlige trekanter kaldet *Sinus-relationen.*

Sinus-relationen

Antag at du har givet nedenstående vilkårlige trekant.



I denne forbindelse får du oplyst vinkel A og side a, og side b kendes. Du skal så finde vinkel B.

Cosinusrelationen fra før kan ikke anvendes, så derfor indføres Sinus-relationen.

Sætning 1.3 (Sinus-relation)

Antag du har givet en vilkår trekant, hvor en vinklerne og deres modstående sider er oplyst. Således gælder følgende.

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(B)}{b} = \frac{Sin(C)}{c}$$

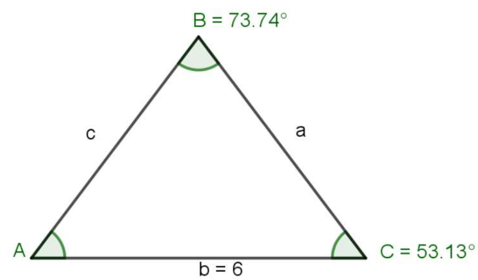
Bevis **Sætning 1.3**

Kan ses i lærebogen på siden 225-226.

Sinus-relationen kan kun anvendes til at bestemme en manglende vinkel eller side, hvis en anden vinkel og dens modstående side i trekanten kendes. Dette behandles i eksemplet nedenfor.

Eksempel 1.7

Der er givet følgende trekant ABC, hvor b = 6, vinkel C = 73.74 grader og vinkel B = 53.13 grader. Beregn ved hjælp af Sinus-relationen siden c.



Løsning Eksempel 1.7

Ved indsættelse i Sinus-relationen opnås følgende udtryk, der løses for c.

$$\frac{Sin(53.13)}{c} = \frac{Sin(73.74)}{6} \xrightarrow{\text{solve for c}} [[c = 4.999988089]]$$

Hermed opnås, at c = 5.

Vi vil på de følgende sider se på anvendelse af Sinus-relationen på mere generel form.

Ligesom ved Cosinus-relationen vælger vi at generalisere anvendelsen af Sinus-relationen i et skema.

Hvad kendes? Hvad ønskes fundet ?	Hvad anvendes?
Hvis vinkel C, siden c og siden a kendes og vinkel A ønskes fundet. Hvis vinkel B, siden b og siden a kendes og vinkel A ønskes fundet.	$Sin(A) = \frac{a \cdot Sin(C)}{c}$ eller $Sin(A) = \frac{a \cdot Sin(B)}{b}$
Hvis siden b, vinkel A og siden a kendes og vinkel B ønskes fundet. Hvis siden b, vinkel C og siden c kendes og vinkel B ønskes fundet.	$Sin(B) = \frac{b \cdot Sin(A)}{a}$ eller $Sin(B) = \frac{b \cdot Sin(C)}{c}$
Hvis siden c,vinkel B og siden b og vinkel C ønskes fundet. Hvis siden c, vinkel A og siden a kendes og vinkel C ønkes fundet.	$Sin(C) = \frac{c \cdot Sin(B)}{b}$ eller $Sin(C) = \frac{c \cdot Sin(A)}{a}$
Hvis vinkel C, vinkel B og siden b kendes og siden c ønskes fundet. Hvis vinkel C, vinkel A og siden a kendes og siden c ønskes fundet.	$c = \frac{Sin(C)}{\left(\frac{Sin(B)}{b}\right)}$ eller $c = \frac{Sin(C)}{\left(\frac{Sin(A)}{a}\right)}$
Hvis siden a, vinkel A og B kendes og siden b ønskes fundet. Hvis siden c, vinkel B og vinkel kendes og siden ønskes fundet.	$b = \frac{Sin(B)}{\left(\frac{Sin(A)}{a}\right)}$ eller $b = \frac{Sin(B)}{\left(\frac{Sin(C)}{c}\right)}$
Hvis vinkel A, vinkel C og siden c kendes og siden a ønskes fundet. Hvis vinkel B, vinkel A og siden b kendes og siden a ønskes fundet.	$a = \frac{Sin(A)}{\left(\frac{Sin(C)}{c}\right)}$ eller $a = \frac{Sin(A)}{\left(\frac{Sin(B)}{b}\right)}$

Vi har tidligere set hvordan man kan bestemme arealet af en trekant ved hjælp af den kendte formel for areal $Areal = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Denne kan udtrykkes ved hælp af Sinus via den halve-*appelsinformlen.*

Arealet af en trekant vha. Sinus.

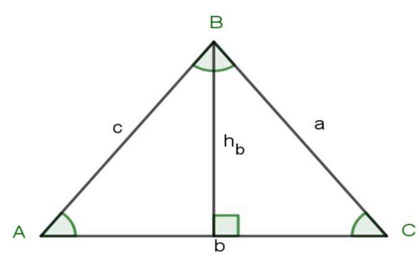
Sætning 1.4 (Den halveappelsin − formel).

Antag du har givet en vilkårlig trekant ABC hvor vinkel C, siden b og siden a kendes. Arealet T af denne trekant kan således udtrykkes:

$T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot Sin(C)$ *Denne formel kaldes den halve-appelsinformel.*

Bevis **Sætning 1.4**

Der er givet en trekant ABC den nedenfor.



1) Det vides fra tidligere, at arealet af trekant kan udtrykkes på traditionel vis ved hjælp af $T=\frac{1}{2}\cdot h_b\cdot g$.

2) Vi har tidligere arbejdet med Sinus og retvinklede trekant, og idet h_b er er modstående katete til vinkel C, så kan dette udtrykkes.

$Sin(C)=\frac{h_b}{a}\rightarrow h_b=Sin(C)\cdot a$

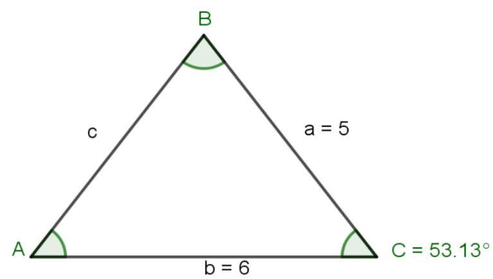
3) idet siden b er grundlinjen i trekant ABC, med andre ord $g=b$.

4) Så kan arealformlen nu skrives $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot Sin(C)$

Denne kaldes også den halve-appelsin formlen og beviset er hermed slut.

Eksempel 1.8.

Antag følgende trekant ABC er givet, hvor a = 5, b = 6 og vinkel C = 53.13 grader. Bestem arealet af trekant ABC.



Løsning(Eksempel 1.8)

Det oplyste værdier indsættes i arealformlen fra Sætning 1.4. T $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot Sin(53.13) = 11.99998392$

Det vil sige, at arealet af trekant ABC er cirka 12.

I nedenstående tabel ses en fremstilling af de varianter den halve-appelsinformel kan forekomme.

Hvad kendes og hvad søges?	Hvad skal bruges?
siden a, siden b og vinkel C haves og areal T af trekant ABC søges.	$T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot Sin(C)$
siden b,siden c og vinkel A haves og arealet T af trekant ABC søges.	$T=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot Sin(A)$
siden a, siden c og vinkel B haves og arealet T af trekant ABC søges.	$T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot Sin(B)$

Efter at have arbejdet med Sinus og Cosinus-relationen, så er vi nu i stand til at kunne sige noget med generelt om beregninger på vilkårlige trekanter.

Hvad kendes og hvad søges?	Hvad bruges?
3 sider, men ingen vinkler kendes. De 3 vinkler søges.	Cosinus-relationen anvendes til bestemme først vinkel. Herefter Cosinus-relationen til den anden. Til slut anvendes 180 graders reglen til bestemme den resterende.
2 sider, og mellemliggende vinkel kendes. Manglende side og vinkler søges.	Cosinus-relationen anvendes til at bestemme manglende side. Herefter Sinus-relationen til bestemme den næste vinkel og til sidst 180 graders reglen til at bestemme resterende vinkel.
2 vinkler og den mellemliggende side kendes. Manglende vinkel og sider ønskes fundet.	Den sidste vinkel beregnes vha. 180 graders reglen. De sidste 2 sider beregnes ved hjælp af Sinus-relationen.
2 vinkler og ikke-mellemliggende side kendes. Manglende vinkel og sider ønskes fundet.	Den sidste vinkel beregnes vha. 180 graders reglen. De sidste 2 sider beregnes ved hjælp af Sinus-relationen.